Unité d'Enseignement CORO : Compléments et outils de recherche opérationnelle

Dualité en Programmation linéaire

ENSIIE
E. Soutil

UE CORO – Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision – Plan du cours

- Partie 1 – Compléments de PL
  - *Dualité*
  - *Analyse de sensibilité / Paramétrisation*
- Partie 2 – PLNE
- Partie 3 – Métaheuristiques
- Partie 5 – Dualité lagrangienne

1. Dualité en programmation linéaire

- La dualité une **notion fondamentale en PL**.
- Chaque PL de **maximisation** donne lieu à un PL de **minimisation** appelé son **problème dual**.
- Les deux problèmes sont liés : chaque solution admissible de l'un fournit une borne de la valeur optimale de l'autre et si les deux problèmes ont des solutions, **leurs valeurs optimales coïncident**.

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- **Exemple**

$$
(P)\begin{cases}
\text{maximiser } z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{lllllll}
x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 & L_1\\
5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 & L_2\\
-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 & L_3\\
\multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } 4}
\end{array}\right.
\end{cases}
$$

- On veut **encadrer la valeur de z^*** (sans avoir à la calculer par la méthode du simplexe)
- Pour en avoir un **minorant**, on peut toujours chercher une solution réalisable de (P) dont la valeur fournira un minorant de z^*, mais sans garantie que cette valeur soit optimale.

$$
\left.\begin{array}{l}
z(0,0,1,0) = 5 \rightarrow z^* \geq 5\\
z(3,0,2,0) = 22 \rightarrow z^* \geq 22\\
z(2,1,1,1/3) = 15 \rightarrow z^* \geq 15
\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{z^* \geq 22}
$$

ensiie PARIS-ÉVRY

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$(P)\begin{cases} \text{maximiser } z = \mathbf{4x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{5x_3} + \mathbf{3x_4} & \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{lllllll} \mathbf{x_1} & \mathbf{-x_2} & \mathbf{-x_3} & \mathbf{+3x_4} & \leq & \mathbf{1} & \boldsymbol{L_1} \\ \mathbf{5x_1} & \mathbf{+x_2} & \mathbf{+3x_3} & \mathbf{+8x_4} & \leq & \mathbf{55} & \boldsymbol{L_2} \\ \mathbf{-x_1} & \mathbf{+2x_2} & \mathbf{+3x_3} & \mathbf{-5x_4} & \leq & \mathbf{3} & \boldsymbol{L_3} \\ x_i \geq 0 & i = 1 \text{ à } 4 & & & & & \end{array} \right. \end{cases}$$

- Essayons d'obtenir un **majorant** de z^* cette fois, en nous servant des contraintes (et de la non-négativité des variables) :

$$2^{\grave{e}me}\ contrainte \times \mathbf{\frac{5}{3}} : \quad \underbrace{4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4}_{z} \leq \underbrace{\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}}_{5/3 \times [2^{\text{ème}} \text{ contrainte}]}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z^* \leq \frac{275}{3} (\simeq \mathbf{91,6})}$$

6.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$(P)\begin{cases} \text{maximiser } z = \mathbf{4x_1} \quad \mathbf{+\, x_2} \quad \mathbf{+\, 5x_3} \quad \mathbf{+\, 3x_4} \\ \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{llllll} \mathbf{x_1} & \mathbf{-x_2} & \mathbf{-x_3} & \mathbf{+3x_4} & \mathbf{\leq\ 1} & \boldsymbol{L_1} \\ \mathbf{5x_1} & \mathbf{+x_2} & \mathbf{+3x_3} & \mathbf{+8x_4} & \mathbf{\leq 55} & \boldsymbol{L_2} \\ \mathbf{-x_1} & \mathbf{+2x_2} & \mathbf{+3x_3} & \mathbf{-5x_4} & \mathbf{\leq\ 3} & \boldsymbol{L_3} \\ x_i \geq 0 & i = 1 \text{ à } 4 & & & & \end{array} \right. \end{cases}$$

- On peut faire beaucoup mieux : $L_2 + L_3$ donne :

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq \mathbf{58}$$

- Donc : $\boldsymbol{z^* \leq 58}$

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$(P)\begin{cases} \text{maximiser } z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \quad L_1 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \quad L_2 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \quad L_3 \\ x_i \geq 0 & i = 1 \text{ à } 4 & & & \end{array} \right. \end{cases}$$

- On peut **généraliser cette stratégie** : on multiplie chaque contrainte L_i par un multiplicateur y_i (appelé **variable duale**) et on somme toutes les contraintes :
  - Le premier cas présenté (2ème contrainte $\times \frac{5}{3}$) correspond à :

$$y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{3}, y_3 = 0$$

  - Le deuxième cas $(L_2 + L_3)$ correspond à :

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$$

ensiie PARIS-ÉVRY

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$(P)\begin{cases} \text{maximiser } z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{lllllll} x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 & L_1 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 & L_2 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 & L_3 \\ x_i \geq 0 & i = 1 \text{ à } 4 & & & & & \end{array} \right. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \times y_1 \\ \times y_2 \\ \times y_3 \end{array}$$

- L'inégalité qui en résulte, en sommant les 3 contraintes multipliées chacune par leur multiplicateur, est :

$$\boxed{\begin{array}{c}(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 \\ +(3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \quad \leq \quad y_1 + 55y_2 + 3y_3\end{array}} \qquad (1)$$

- Chaque multiplicateur y_i doit être **positif ou nul** (sinon il y aurait un changement de sens de l'inégalité).

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \quad (1)$$
- De plus, on désire utiliser le membre de gauche de (1) comme majorant de
$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4.$$
- Cela n'est valide que si, pour chaque variable x_i, son coefficient dans (1) est supérieur ou égal à son coefficient dans z. Nous voulons donc :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq & 3 \end{array}}$$
- Si $y_i \geq 0 \ \forall i$ et si les 4 contraintes ci-dessus sont vérifiées, alors toute solution réalisable de (P) vérifie l'inégalité :
$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

1.1) Motivation : trouver des majorants de la valeur optimale

- $$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$
- En particulier pour x^* cette inégalité est vraie.
- Donc : $z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$.
- Comme on désire un majorant le plus petit possible on est naturellement amené à choisir pour y la solution du programme linéaire (D) suivant, que l'on appelle programme dual de (P) :

$$(D)\begin{cases} \text{minimiser} \quad w = y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \quad s.c. \left| \begin{array}{rcl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq & 3 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } 3 & & \end{array} \right. \end{cases}$$

<u>Rappel</u> :

$$(P)\begin{cases} \text{maximiser } z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \quad \text{s.c.} \left| \begin{array}{rrrrcl} x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 \\ \multicolumn{6}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } 4} \end{array} \right. \end{cases}$$

1.2) Généralisation

- Au problème (*P*) défini par :

$$(P)\begin{cases}\textbf{maximiser} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textbf{s.c.} \left|\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & (i = 1 \text{ à } m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1 \text{ à } n)\end{array}\right.\end{cases}$$

→ **problème primal**

- … on associe son **problème dual** (*D*) :

$$(D)\begin{cases}\textbf{minimiser} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \textbf{s.c.} \left|\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j & (j = 1 \text{ à } n) \\ y_i \geq 0 & (i = 1 \text{ à } m)\end{array}\right.\end{cases}$$

→ **problème dual**

1.2) Généralisation

- Ou bien, sous forme matricielle :

$$(P)\begin{cases} Max\, z = cx \\ s.c. \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Min\, w = yb \\ s.c. \left| \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- <u>NB</u> : $(yA)^t = A^t y^t$. La matrice des contrainte de (*D*) est la transposée de celle de (*P*).

ensiie PARIS-ÉVRY

1.2) Généralisation

$$(P)\begin{cases} Max\, z = cx \\ s.c. \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Min\, w = yb \\ s.c. \left| \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- **Prop.** : si (*P*) et (*D*) admettent des solutions réalisables, toute solution réalisable x de (P), $x = (x_1, \dots, x_n)$, et toute solution réalisable y de (D), $y = (y_1, \dots, y_m)$, vérifient :

$$\boxed{z = cx \leq yb = w} \qquad (2)$$

- **Démonstration** :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \blacksquare$$

- **Corollaire** : si x^* et y^* sont deux solutions respectives de **(*P*)** et **(*D*)** qui vérifient $z(x^*) = w(y^*)$, alors il est possible de conclure immédiatement que x^* **est optimal pour (*P*)** et y^* **pour (*D*)**.

ensiie PARIS-ÉVRY

1.3) Théorème de la dualité

$$(P)\begin{cases} Max\, z = cx \\ s.c. \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} Min\, w = yb \\ s.c. \left| \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- **Théorème** : si le problème primal (*P*) a une solution optimale $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ alors le problème dual (*D*) a une solution optimale $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ telle que $z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w^*$.

- **Idée de la preuve** :
  - On considère le tableau simplexe optimal de (*P*) et on pose $y_i^* = -\Delta_i$ où Δ_i désigne le coût réduit de la $i^{ème}$ variable d'écart de (*P*) dans le tableau optimal de (*P*).
  - On montre qu'alors y^* vérifie toutes les contraintes du dual et qu'il y a égalité entre les valeurs de x^* dans (*P*) et y^* dans (*D*).

1.4) Définition du dual dans le cas général

- Pour un PL quelconque (pas nécessairement sous la forme canonique), on applique les règles d'écriture suivantes.

Problème de minimisation	Problème de maximisation
Fonction objectif : min	Fonction objectif : max
Second membre	Fonction objectif
A matrice des contraintes	A^t matrice des contraintes
Contrainte i de type $\geq$	Variable $y_i \geq 0$
Contrainte i de type $\leq$	Variable $y_i \leq 0$
Contrainte i de type $=$	Variable u_i non contrainte en signe
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte j de type $\leq$
Variable x_j non contrainte en signe	Contrainte j de type $=$

- Attention, le tableau n'est pas symétrique, il faut considérer que la colonne de gauche est le problème de minimisation et la colonne de droite le problème de maximisation dans un couple primal/dual.
- On observe en particulier que **le dual du dual est le primal.**

1.4) Définition du dual dans le cas général

- **Exemple** :

$$(PRIMAL)\begin{cases}\text{Min } 2x_1 - 3x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{c} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad (DUAL)\begin{cases}\text{Max } y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Problème de minimisation	Problème de maximisation
Fonction objectif : min	Fonction objectif : max
Second membre	Fonction objectif
A matrice des contraintes	A^t matrice des contraintes
Contrainte i de type $\geq$	Variable $y_i \geq 0$
Contrainte i de type $\leq$	Variable $y_i \leq 0$
Contrainte i de type $=$	Variable y_i non contrainte en signe
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte j de type $\leq$
Variable x_j non contrainte en signe	Contrainte j de type $=$

ensiie PARIS-ÉVRY

1.5) Relations entre les variables du primal et du dual

- La résolution des deux programmes (P) et (D) par la méthode du simplexe, nécessite l'introduction de variables d'écarts : m variables pour (P) et n variables pour (D).
- À une variable principale de l'un est associée la variable d'écart correspondante de l'autre :

$$\boldsymbol{x_i} \text{ correspond à } \boldsymbol{y_{\bar{\imath}}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{x_{\bar{\imath}}} \text{ correspond à } \boldsymbol{y_i}$$

- **Notation** : à un indice k on associe l'indice $\bar{k}$

$$\text{avec} \begin{cases} \bar{k} = \bar{\imath} & \text{si} \quad k = i \\ \bar{k} = i & \text{si} \quad k = \bar{\imath} \end{cases}$$

1.6) Passage du tableau optimal du primal à celui de la version maximisation du dual

x_k est hors base du tableau optimal de (P)

$\Updownarrow$

$y_{\bar{k}}$ est de base du tableau optimal de (D)

Elément du tableau optimal de (D) → $a'_{ij} = -a_{\bar{j}\bar{i}}$ ← Elément du tableau optimal de (P)

j est hors base du tableau de (D)

Second membre du tableau optimal de (P) → $\Delta'_{\bar{i}} = -b_i$ ← Coût réduit du tableau optimal de (D)

i est de base du tableau de (P)

Second membre du tableau optimal de (D) → $b'_i = -\Delta_{\bar{i}}$ ← Coût réduit du tableau optimal de (P)

I est de base du tableau de (D)

1.6) Passage du tableau optimal du primal à celui de la version maximisation du dual

- **Exemple** :

$$(P)\begin{cases} \text{Max } Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 \quad \leq 1000 \\ x_2 \quad \leq \;\; 500 \\ x_3 \quad \leq 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$(D)\begin{cases} \text{Min } W = 100y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} y_1 + 3y_4 \geq 4 \\ y_1 + 6y_4 \geq 12 \\ y_3 + 2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- Version maximisation de (D) :

$$(D')\begin{cases} \text{Max } W' = -100y_1 - 500y_2 - 1500y_3 - 6750y_4 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} y_1 + 3y_4 \geq 4 \\ y_1 + 6y_4 \geq 12 \\ y_3 + 2y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

1.6) Passage du tableau optimal du primal à celui de la version maximisation du dual

Tableau optimal de (P)

B	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$	$\bar{b}$
x_1	1	0	0	0	-2	-2/3	1/3	250
x_2	0	1	0	0	1	0	0	500
$x_{\bar{1}}$	0	0	0	1	2	2/3	-1/3	750
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1500
Δ	0	0	0	0	-4	-1/3	-4/3	-11500

Tableau optimal de (D')

B	y_1	y_2	y_3	y_4	$y_{\bar{1}}$	$y_{\bar{2}}$	$y_{\bar{3}}$	$\bar{b}$
y_2	-2	1	0	0	2	-1	0	4
y_3	-2/3	0	1	0	2/3	0	-1	1/3
y_4	1/3	0	0	1	-1/3	0	0	4/3
Δ	-750	0	0	0	-250	-500	-1500	+11 500

1.7) Interprétation économique du dual

Un problème de transport

- Une entreprise de construction d'automobiles possède trois usines situées à Paris, Strasbourg et Lyon.
- Le métal nécessaire à la construction est disponible aux ports du Havre et de Marseille, en quantité 550 pour Marseille et 350 pour Le Havre
- Paris a besoin de 400 tonnes de métal chaque semaine, Strasbourg 300 et Lyon 200.
- Les coûts de transport varient proportionnellement aux quantités transportées et les coûts unitaires sont :

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

1.7) Interprétation économique du dual

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

- PL associé :

$$(P_2)\begin{cases} \text{Min } z = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} & \leq 550 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq 350 \\ x_{11} + x_{21} & \geq 400 \\ x_{12} + x_{22} & \geq 300 \\ x_{13} + x_{23} & \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2, j = 1,2,3 & \end{array} \right. \end{cases}$$

- et son dual peut s'écrire :

$$(D_2)\begin{cases} \text{Min } w = 550y_1 + 350y_2 - 400y_3 - 300y_4 - 200y_5 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{ll} y_1 - y_3 & \geq -5 \\ y_1 - y_4 & \geq -6 \\ y_1 - y_5 & \geq -3 \\ y_2 - y_3 & \geq -3 \\ y_2 - y_4 & \geq -5 \\ y_2 - y_5 & \geq -4 \\ y_i \geq 0 \ \forall i & \end{array} \right. \end{cases}$$

1.7) Interprétation économique du dual

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

Un problème de transport

- Supposons maintenant qu'un transporteur propose à la direction de l'entreprise de construction automobile de lui acheter le métal aux prix π_1 et π_2 aux ports de Marseille et du Havre, de se charger du transport et de lui revendre le métal aux prix η_1, η_2 et η_3 aux usines de Paris, Strasbourg et Lyon.
- Pour convaincre la direction que l'affaire ne lui sera pas défavorable, le transporteur garantit que ses prix seront compétitifs avec les coûts actuels de transport, c-à-d :

$$(1)\begin{cases}\eta_1 - \pi_1 \leq 5\\ \eta_2 - \pi_1 \leq 6\\ \eta_3 - \pi_1 \leq 3\\ \eta_1 - \pi_2 \leq 3\\ \eta_2 - \pi_2 \leq 5\\ \eta_3 - \pi_2 \leq 4\end{cases} \quad \eta_i, \pi_j \geq 0$$

1.7) Interprétation économique du dual

	Paris	Strasbourg	Lyon
Marseille	5	6	3
Le Havre	3	5	4

- **Un problème de transport**
  - La direction de l'entreprise convient que dans ces conditions, il vaut mieux laisser le transporteur se charger du travail
  - Le transporteur quant à lui doit trouver des prix qui satisfont l'ensemble des contraintes (1)
  - Comme il désire de plus rendre son profit maximum il cherchera à maximiser la somme que lui versera l'entreprise, à savoir :
  $$400\eta_1 + 300\eta_2 + 200\eta_3 - 550\pi_1 - 350\pi_2$$
  - En posant $y_1 = \pi_1$, $y_2 = \pi_2$, $y_3 = \eta_1$, $y_4 = \eta_2$ et $y_5 = \eta_3$, le programme linéaire du transporteur est (D_2), le dual du PL de l'entreprise de construction d'automobiles.
- Les variables duales ont dans la plupart des cas une interprétation physique ou économique suivant la nature des problèmes que le PL modélise.

1.8) Relations d'exclusion

- Soient $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ deux solutions admissibles de (P) et (D) :
  - $\tilde{x}^t = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{\bar{1}}, \dots, \tilde{x}_{\bar{m}})$
  - $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m, \tilde{y}_{\bar{1}}, \dots, \tilde{y}_{\bar{n}})$

$\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont optimales pour (P) et (D)

si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n \quad \tilde{x}_i \tilde{y}_{\bar{i}} = 0 \\ \text{et} \\ \forall i = 1, \dots, m \quad \tilde{y}_i \tilde{x}_{\bar{i}} = 0 \end{cases}$$

1.8) Relations d'exclusion

- En d'autres termes, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ deux solutions optimales respectivement pour (P) et (D) si et seulement si :

  - Si une **contrainte** de l'un des programmes linéaires est **lâche** (non saturée), la **variable** correspondante **du dual** est **nulle**

  - Si une **variable** de l'un des programmes linéaires est **strictement positive**, la **contrainte** correspondante **du dual** est **saturée**

- Il s'agit du **théorème faible des écarts complémentaires**