1 Applications mesurables et mesures.

Le but de ce cours est d'introduire une notion d' intégrale à la fois plus simple et plus générale que l'intégrale de Riemann, et aussi faire le pont entre les deux théories : Analyse et Probabilités. L'intégrale de Riemann d'une fonction f définie sur une intervalle $[a, b]$ est définie comme la limite commune des sommes inférieures et supérieures de Darboux, dans le cas où cette limite est en effet commune. C'est à dire, on peut intégrer les fonctions continues ou "pas trop discontinues". La fonction de Dirichlet $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cup[0,1]}$ représente un exemple classique d'une fonction non Riemann intégrable. Or elle est nulle "très souvent" et intuitivement on voudrait dire que son intégrale est égale à zéro. Ce qui est vrai si l'on considère l'intégrale de Lebesgue.
L'intégrale de Riemann s'adresse à des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Or dans la théorie des probabilités l'ensemble de référence est l'espace de probabilités, c'est à dire l'ensemble de réalisations d'une expérience aléatoire. On "intègre" directement les fonctions du résultat de l'expérience aléatoire à l'aide de l'espérance mathématique. On voudrait pouvoir traiter l'espérance mathématique comme une intégrale, c'est possible si l'on considère l'intégral de Lebesgue. De même, les séries numériques sont des d'intégrales de Lebesgue par rapport à la mesure de comptage. Ce point de vue unifié est extrémement pratique.
L'intégrale de Lebesgue a été introduite en 1902 par un mathématicien français Henri Lebesgue, c'est une intégrale extrêmement commode d'emploi et généralisant tous les intégrales connus : Riemann, Darboux, Stieltjes. Sa théorie de l'intégration repose sur la théorie de mesure et avant d'introduire la notion de l'intégrale on doit définir les ensembles pouvant étre mesuré et les fonctions pouvant étre intégrés. Tout cela fera l'objet de la premiére section de ce cours. La théorie de mesure est très importante pour le Calcul de Probabilités, car une probabilité est une mesure. Les ensembles pouvant être mesurés sont les ensembles "informatives" en probabilités. La théorie de la mesure de Lebesgue utilise beaucoup la notion de "dénombrable". Les rappels sur cette notion font l'objet du paragraphe suivant.

1.1 Rappels sur la dénombrabilité.

On veut définir la taille d'un ensemble E, qu'on appelle son cardinal et que l'on note $card(E)$. Si E est constitué d'un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ éléments, on pose naturellement $card(E) = n$. Si E est un ensemble infini, on voudrait définir son cardinal en comparant avec les ensembles de référence, comme $\mathbb{N}, \mathbb{R}$.

Definition 1.1 *Soient E et F deux ensembles.*

1. *On dit que $card(E) = card(F)$ ou que E et F sont équipotent, s'il existe une bijection entre E et F.*
2. *On dit que $card(E) \leq card(F)$ s'il existe une injection de E dans F.*
3. *On dit que $card(E) < card(F)$ s'il existe une injection de E dans F mais il n'existe pas de surjection.*

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur la collection de tous les ensembles. On peut donc repartir tous les ensembles en classes des ensembles de cardinaux égaux.

Exemple 1.2 *1. $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents par la bijection*

$$\mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X; \qquad A \mapsto \mathbf{1}_A.$$

2. $\mathbb{N}$ set équipotent à $2\mathbb{N}$ car $n \mapsto 2n$ est une bijection.

Proposition 1.3 *Soit E un ensemble. Alors $card(E) < card(\mathcal{P}(E))$.*

Preuve Supposons que $f : E \to \mathcal{P}(E)$ est une surjection. Notons $A = \{x \in E; \quad x \notin f(x)\}$. Puisque f est surjective, A a un antécédent, soit $a \in E$ telle que $f(a) = A$. Alors, si $a \in A$, $a \notin f(a) = A$ et si $a \notin A$, $a \in f(a) = A$, donc contradiction. •

Definition 1.4 *1. Un ensemble E est dit dénombrable, si l'on a $card(E) \leq card(\mathbb{N})$. Il est fini si $card(E) < card(\mathbb{N})$ et infini dénombrable si $card(E) = card(\mathbb{N})$.*

2. Un ensemble est dit infini non-dénombrable si $card(E) > card(\mathbb{N})$.
On note $card(\mathbb{N})$ par $\aleph^0$.

Proposition 1.5 *1. $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.*

2. $\mathbb{N}^2$ est infini dénombrable.

3. $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

Preuve

1. $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $\Phi(2n) = n, \quad \Phi(2n-1) = -n$ est une bijection.
2. $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ donnée par $\Phi(0,0) = 0$ et $\Phi(p,q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$ est une bijection. Cette application consiste à numéroter les couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ au fur et à mesure de leur rencontre le long du parcours des diagonales.
3. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, donc $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathbb{Q})$. D'autre part tout rationnel r s'écrit de façon unique $r = \frac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, pgcd $(p,q) = 1$ L'application $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ donnée par $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$ est donc une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a donc $card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$. Mais $card(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) = card(\mathbb{N}^2) = card(\mathbb{N})$.

•

Proposition 1.6 *1. Pour tout $d \geq 1$, $\mathbb{N}^d$ est infini dénombrable.*

2. Pour tout $d \geq 1$, si les ensembles $X_1, \ldots X_d$ sont dénombrables, leurs produit cartésien $X_1 \times \ldots \times X_d$ est dénombrable.

Preuve

1. Par récurrence
2. Pour $d = 2$, les ensembles X_1 et X_2 étant dénombrables, ils existent deux injections $\Phi_i : X_i \to \mathbb{N}$. Alors l'application $\Phi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\Phi(x_1, x_2) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2))$ est une injection. Le passage de d à $d+1$ se fait en notant $X_1 \times \ldots \times X_{d+1} = (X_1 \times \ldots \times X_d) \times X_{d+1}$.

- Remarque : produit infini d'ensembles dénombrables n'est pas nécessairement dénombrable.

Exemple 1.7 *L'ensemble* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas dénombrable.*

Proposition 1.8 *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Théorème 1.9 $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Preuve Soit Φ l'application définie par $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1/2]$ par $x = (x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}$. Φ est une injection, car , si $x \neq y$ et $l = min\{n; x_n \neq y_n\}$, on a

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \geq \frac{1}{3^{l+1}} - \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{l+1}} > 0.$$

On a $card\{0,1\}^{\mathbb{N}} = card\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Il vient que

$$card(\mathbb{N}) < card\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq card\mathbb{R}.$$

Pour établir l'égalité $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = card\mathbb{R}$ on montre que l'application $\Psi : [0,1[\to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donnée par $x \mapsto \Psi(x) := (x_n)_{n\geq 0}$ où$x_0 := [2x]$, et $x_n := [2^{n+1}(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{2^{k+1}})], n \geq 1$ est une injection. $\Psi(x)$ est le développement dyadique propre de x et l'on a égalité $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$, ce qui entraine son injectivité.

•

1.2 Opérations sur les ensembles.

Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties et $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Definition 1.10 *On note*

1. $A \cup B := \{x \in X \ t.q. \ x \in A \quad ou \quad x \in B\}$;
2. $A \cap B := \{x \in X \ t.q. \ x \in A \quad et \quad x \in B\}$;
3. $A^c := \{x \in X \quad t.q. \quad x \notin A\}$
4. $A \setminus B := \{x \in X; \ x \in A \ \ et \ x \notin B\} = A \cap B^c$;
5. $A\Delta B := \{x \in X; x \in A \cup B; \quad x \notin A \cap B\}$.

Definition 1.11 *Soit* $f : X \to Y$, $A_i \subset X, B_i \subset Y, i \in I$ *On associe à* f *les fonctions "image directe "* f_d *et "image réciproque "* f_r^{-1} *définies par*

$$f_d : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),$$
$$A \mapsto f_d(A) := \{f(x), \ x \in A\}$$

$$f_r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),$$
$$B \mapsto f_r^{-1}(B) := \{x \in X; \ f(x) \in B, \}$$

On note presque systématiquement f au lieu de f_d et f^{-1} au lieu de f_r^{-1}. On a les formules de Hausdorff :

$$f_d\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f_d\left(A_i\right); \quad f_d\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f_d\left(A_i\right), \quad \text{avec égalité si injective}$$

$$f_r^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f_r^{-1}\left(B_j\right); \quad f_r^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f_r^{-1}\left(B_j\right)$$

$$\left(f_r^{-1}(B)\right)^c = f_r^{-1}\left(B^c\right)$$

Notation : Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ est une famille de parties de Y, on note

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C);\ C \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Definition 1.12 *Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable de sous-ensembles. On définit la "limite supérieure" et la "limite inférieure" des A_n par :*

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \{x \in X;\ \forall n \geq 1, \exists k \geq n \ t.q.\ x \in A_k\}, \tag{1.1}$$

$$= \{x \in X,\ x \in A_k \ \textit{infiniment souvent}\} \tag{1.2}$$

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k := \{x \in X, \exists n \geq 1,\ t.q.\ \forall k \geq n \ x \in A_k\}, \tag{1.3}$$

$$= \{x \in X,\ t.q.\ x \in A_k \ \textit{à partir d'un certain rang}\} \tag{1.4}$$

1.3 Tribus

Definition 1.13 *Soit X un ensemble. On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur X toute famille $\mathcal{A}$ de partie de X vérifiant :*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$,*
2. *si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par complémentaire)*
3. *si $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$, alors $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par réunion dénombrable).*

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé un espace mesurable.

On voit immédiatement que $\mathcal{A}$ est stable aussi par réunion fini

Exemple 1.14
1. *$\mathcal{A} : = \{\emptyset, X\}$, tribu dite grossière.*
2. *$\mathcal{A} : = \mathcal{P}(X)$, tribu dite triviale.*
3. *Soit $A \subset X$, fixé ; $\mathcal{A} := \{\emptyset, X, A, A^c\}$ est la plus petite tribu contenant le sous-ensemble A.*
4. *Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de tribus sur X, et $I \neq \emptyset$, alors $\mathcal{A} := \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une tribu*
5. *Soit X un espace topologique. La famille de tous les ouverts n'est pas une tribu.*

Proposition 1.15 *1.* $X \in \mathcal{A}$.

2. *Si* $A_n \in \mathcal{A}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. *Il en découle aussi la stabilité par intersection fini.*

3. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

4. *Si* $A_n \in \mathcal{A}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\limsup_n A_n$ *et* $\liminf_n A_n \in \mathcal{A}$.

En fait, les tribus importantes sont obtenues par le procédé (peu explicite) suivant. Pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de X il existe une plus petite tribu sur X qui la contienne ; on la note par $\sigma(\mathcal{C})$ et on l'appelle la tribu engendrée par la classe $\mathcal{C}$. Considérons en effet l'intersection de toutes les tribus sur X qui contienne $\mathcal{C}$. Il en existe au moins une, car $\mathcal{P}(X)$ est une tribu. Il est facile à voir que cette intersection est elle-même une tribu.

Proposition 1.16 *Soit* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ *une famille de parties de* X*. Il existe une plus petite tribu (au sens d'inclusion) contenant* $\mathcal{C}$*. On la note* $\sigma(\mathcal{C})$ *: c'est la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*.*

1. Si $\mathcal{C}$ *est une tribu,* $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

2. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, *alors* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Soit X un espace topologique. La plus petite tribu contenant tous les ouverts est appelée tribu borélienne sur X et notée $\mathcal{B}(X)$. Il est évident que c'est aussi la tribu engendrée par tous les fermés.

Proposition 1.17 *On a les égalités*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}) \tag{1.5}$$

$$= \sigma(\{]-\infty, a[,\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]-\infty, a],\ a \in \mathbb{Q}\}) \tag{1.6}$$

Proposition 1.18 *(Tribu image réciproque) Soit* $f : X \to Y$ *et* $\mathcal{B}$ *une tribu sur* Y*. Alors*

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\} \text{ est une tribu sur } X.$$

Cette tribu est appelé tribu image-réciproque de $\mathcal{B}$ *par* f*. On la note* $f^{-1}(\mathcal{B})$*.*

Si $f : X \to Y$ est une application et $\mathcal{A}$ est une tribu sur X, , alors $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas en général une tribu.

Definition 1.19 *On appelle tribu image de* $\mathcal{A}$ *par* f*, la tribu sur* Y *définie par*

$$\{B \in \mathcal{P}(Y),\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

Lemme 1.20 *Lemme de transport.*
Soit $f : X \to Y$ *et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$*. Alors* $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$*. (Toutes deux sont des tribus sur* X*).*

Preuve $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, d'ou $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. Pour montrer l'inclusion inverse on considére $\mathcal{B}$ la tribu image de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par f, $\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{P}(Y);\ f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. On a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B},\ \ \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B},\ \ f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

•

2 Mesure positive

Definition 2.1 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$ toute application $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, vérifiant la propriété suivante, dite de "σ-additivité" : Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s'appelle espace mesuré. Si $\mu(X) < \infty$, la mesure est dite finie ou bornée. Si $\mu(X) = 1$, μ est une probabilité.

Exemple 2.2

1. *La mesure de Dirac au point $a \in X$:*

$$\forall A \in \mathbf{P}(X),\ \ \mu(A) := \begin{cases} 1 & si \quad a \in A \\ 0 & si \quad a \notin A \end{cases}$$

2. *La mesure de comptage sur $(X, \mathbf{P}(X))$:*

$$\forall A \in \mathbf{P}(X),\ \ \mu(A) := \begin{cases} card(A) & si\ A\ est fini \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

3. *Probabilité conditionnelle. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et B un évenement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Alors, $\mathbf{P}(.|B) := \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ est une probabilité sur la tribu-trace de $\mathcal{F}$ sur B.*
4. *Mesure image : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et un autre espace mesurable $(Y, \mathcal{F})$ Soit $f : X \to Y$ mesurable. La mesure image ν de μ par f est définie sur $\mathcal{F}$ par $\forall B \in \mathcal{F},\ \nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$.*
5. *Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est de loin la plus importante de la liste. Elle est à la base de l'extension de l'intégrale de Riemann aux fonctions boréliennes.*

Théorème 2.3 *Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dite mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et notée λ_d, vérifiant*

1. $\lambda_d([0,1]^d) = 1$,
2. $\forall a \in \mathbb{R}^d,\ \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda(a + A) = \lambda_d(A)$.

On peut démontrer les propriétés suivantes de la mesure de Lebesgue :

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sa mesure de Lebesgue est égale à sa longueur.
Pour tout pavé $P := I_1 \times \ldots \times I_d$ de $\mathbb{R}^d$ (produit cartésien d'intervalles)

$$\lambda_d(P) = \prod_{1\leq l\leq d} long(I_l).$$

Exemple 2.4 *La mesure image est particuliérement importante en théorie des probabilités : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace mesuré ou $\mathbf{P}$ est une probabilité. Soit X une variable aléatoire, c'est à dire une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dans $(R, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On appelle loi de X et on note P_X la mesure image de $\mathbf{P}$ par X, c'est à dire $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ P_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B))$.*

Théorème 2.5 *Soit μ mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$. Alors pour tous $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{A}$,*

1. $\mu(A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$, *si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$.*
2. *$A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$; si $\mu(A) < \infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. *Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$,*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n),$$
4. *Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $\mu(A_1) < \infty$,*
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n),$$
5. *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$,*
$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Dans les applications, il est extrêmement important de pouvoir identifier les mesures et notamment les probabilités en utilisant l'information la plus restreinte possible, en d'autres termes les théorème d'unicité suivant jouera un rôle important :

Théorème 2.6 *(Théoréme d'unicité). Soient μ_1 et μ_2 deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \sigma(\mathcal{C}))$ où $\mathcal{C}$ est une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Si pour tout $A \in \mathcal{C}, \mu_1(A) = \mu_2(A)$, alors μ_1 et μ_2 coïncident sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

Application : deux mesures qui donnent les mêmes valeurs aux intervalles $]-\infty, x]$ sont identiques.

La preuve du théorème (facultatif, fais pas partie du cours)) repose sur plusieurs étapes.

Definition 2.7 *On appelle classe monotone toute famille $\mathcal{M}$ de parties de X vérifiant*

1. *$X \in \mathcal{M}$,*
2. *Si $A, B \in \mathcal{M}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$,*
3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante $(A_n \subset A_{n+1})$ d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

Proposition 2.8 *Soit $\mathcal{T}$ une famille de parties de X. Alors $\mathcal{T}$ est une tribu $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$ est une classe monotone vérifiant de plus : $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B \in \mathcal{T}$.*

Proposition 2.9 *Si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de X, il existe la plus petite classe monotone, contenant $\mathcal{C}$. On la note $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.*

Théorème 2.10 *Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de X, stable par intersection finie et contenant X, alors*
$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

Preuve (du théorème d'unicité) $\mathcal{M} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}))/\mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Alors c'est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$, donc contenant $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. •

2.1 Fonctions mesurables

Les fonctions mesurables jouent un grand rôle dans la théorie d'intégrale de Lebesgue. Ce sont les fonctions sur lesquelles l'intégrale sera définie. Bien que la classe des fonctions mesurables est très large, et il est très difficile d'imaginer une fonction qui n'en appratient pas (toutes les fonctions que l'on rencontre dans la vie sont mesurables), il est important de comprendre comment cette classe est construite à partir des fonctions très simples. C'est indispensable pour la construction de l'intégrale de Lebesgue, définie aussi de cette façon : d'abord sur les fonctions très simples, ensuite par le passage à la limite sur toutes les fonctions mesurables.

Definition 2.11 *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mesurable si*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Si X et Y sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, on parle d'une fonction borélienne.

Remarque la définition équivalente consiste à dire que $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. La tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f est la plus petite tribu qui rend f meusrable, on la note $\sigma(f)$.

Exemple 2.12 *Si $A \subset X$, $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et s.si A l'est.*

Exemple 2.13 *Toute fonction constante est mesurable, car tout l'espace apparient à toute tribu.*

La proposition suivante permet de montrer facilement la mesurabilité d'une fonction.

Proposition 2.14 *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est une famille de parties de Y. Alors f est mesurable si et s.si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.*

Application

1. $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ est mesurable si et s.si
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \geq a\} \in \mathcal{A}.$$
2. $f(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$ où Y est un espace topologique muni de sa tribu borélienne est mesurable si et ssi pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset Y,\ f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{A}$.
3. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une fonction continue est borélienne.

Proposition 2.15 *Soient $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{C})$. Si f et g sont mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.*

Corollaire 2.16 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable. Alors $\max(f, a), \min(f, a), |f|, f^+, f^-$ sont mesurables.*

Proposition 2.17 – *Soit $f:(f_1,f_2):(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. La fonction f est mesurable si et s.si f_1 et f_2 le sont comme fonctions de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
– *$f:(f_1,f_2):(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et s.si $\Re f$ et $\Im f$ le sont.*

Preuve
– $\Longrightarrow$ On suppose que f st mesurable. Or $f_1=\pi_1\circ f$ où π_1 est continue.
– $\Longleftarrow$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))=\sigma\{U\times V,\ U,V-\text{ouverts de}\mathbb{R}\}$. $f^{-1}(U\times V)=f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V)$.

•

2.2 Opérations sur les fonctions mesurables

Proposition 2.18 *Soient f et $g:(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes . Alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, $af+g$ et fg sont mesurables.*

Preuve $(f,g):(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est mesurable d'apres la proposition2.17. les fonctions $ax+y$ et xy sont continues. On conclut par la proposition2.15. •

Proposition 2.19 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.*
– *$\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables,*
– *$\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables,*
– *si $f_n\to f$ simplement, alors f est mesurable.*

Definition 2.20 *Une fonction $f:(X,\mathcal{A})\to(K,\mathcal{B}(K)$ est étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $K=\mathbb{R}$ ou $\mathcal{C}$. On a donc $f=\sum_{i\in I}a_i\mathbf{1}_{A_i}$, ou I est fini, $a_i\in K$, $(A_i)_{i\in I}$ partition mesurable de X.*

Théorème 2.21 *(Theoréme fondamental d'approximation) Soit $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{C}$, mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées, telle que pour tout $x\in X$, $\lim_n f_n(x)=f(x)$. De plus, si $f\geq 0$, on peut choisir cette suite croissante, si f est bornée, on peut choisir la suite de façon que la convergence sera uniforme.*

Preuve Si $f\geq 0$, on pose

$$E_{n,k}=\left\{\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}\right\}, k\in\{0,\dots n2^n-1\}\text{ et }E_{n,\infty}=\{f\geq n\}$$

La suite $f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\times\mathbf{1}_{E_{n,k}}+n\mathbf{1}_{E_{n,\infty}}$ est croissante etc •

3 Intégral de Lebesgue par rapport à une mesure positive

3.1 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On considére, dans ce chapitre, un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dans la théorie d'intégration on rencontre inévitablement ∞. Une des raisons est que l'on travaille aussi avec des ensembles de mesure infini. Une autre raison est que la limite d'une suite de fonctions finies peut étre ∞ en certains points. Alors on définit $0+\infty = \infty + 0 = \infty$ et $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.

3.1.1 Intégrale d'une fonction étagée positive.

Definition 3.1 *Soit $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbf{1}_{f=\alpha}$ une fonction étagée $\mathcal{A}$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'intégrale de Lebesgue de f est définie par*

$$\int_X f d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \bar{\mathbb{R}}_+.$$

Proposition 3.2 *Soit f une fonction étagée $\mathcal{A}$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute décomposition $f := \sum_{i \in I} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, où$(A_i)_i$ est une partition mesurable de X, on a*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i).$$

Remarque : si $f \equiv 0$, $\int_X f d\mu = 0$ même si $\mu(X) = \infty$.

Preuve

$$\sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) = \sum_{\alpha \in f(X)} \sum_{i; a_i = \alpha} a_i \mu(A_i).$$

•

Exemple 3.3 *1. Mesure de Dirac : Soit $\mu = \delta_a$, $a \in X$. Alors pour toute f étagée*

$$\int_X f d\mu = f(a).$$

2. *Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{I_i}$, où (I_i) sont des intervalles de $\mathbb{R}$, formant une partition, $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i |I_i|$.*
3. *Mesure de comptage : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(N), m)$ où $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ $m(A) = Card(A)$ Alors on a*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Proposition 3.4 *Soient f, g deux fonctions étagées positives.*

1. *addditivité :* $\int_X (f+g) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ *;*
2. *positivité :* $f \geq 0 \Longrightarrow \int_X f d\mu \geq 0$ *et donc* $f \geq g \Longrightarrow \int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$.
3. *homogénéité : pour tout* $\lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$.

Preuve Si $f := \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $g := \sum_{j\in J} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, then $f+g = \sum_{(i,j)\in I\times J} (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$ •

Si $A \in \mathcal{A}$ et f étagée positive, $\mathbf{1}_A f$ est aussi étagée positive. On pose

$$\int_A f d\mu := \int_X (1_A f) d\mu.$$

Le lemme suivant est important pour la construction de l'intégral de Lebesgue :

Lemme 3.5 1. *Si* $A \cap B = \emptyset$,

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

2. *Si* $(E_n)_n$ *est une suite croissante d'ensembles de* $\mathcal{A}$, *telle que* $X = \cup_n E_n$, *pour toute* f *étagée positive,*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Preuve $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ et $\mu(A \cup E_n) \to \mu(A \cup (\cup_n E_n))$, car $(A \cup E_n)$ est un système croissant. •

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On désigne par

$$\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) := \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}_+)), \text{ mesurables}\}.$$

Definition 3.6 *Si* $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, *on pose*

$$\int_X f d\mu := \sup\{\int_X \phi d\mu, \ \phi \leq f, \ \phi \text{ étagée positive}\}.$$

On a $\int_X f d\mu \in \bar{\mathbb{R}}_+$. *Si* $\int_X f d\mu < \infty$, *on dit que* f *est* μ*-intégrable.*

Lorsque la fonction f est étagée elle même, la définition coïncide avec la définition de la section précédente. En plus, si $f, g \in \mathcal{M}^+$, et $f \leq g$, alors

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Théorème 3.7 *(Beppo-Lévi ou convergence monotone, notée TCM)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite croisante d'élements de* $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, $0 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$. *Alors* $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ *et*

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

On rappelle que toute fonction mesurable positive peut étre approchée par une suite croissante de fonctions étagées (lemme fondamental d'approximation). En combinant ce lemme avec le TCM, on voit que les propriétés de l'intégrale pour les fonctions étagées passent à la limite et donnent lieu au propriétés correspondantes pour les fonctions mesurables positives :

Proposition 3.8 *Soient* f, g *deux fonctions étagées positives.*

1. *addditivité :* $\int_X (f+g) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ *;*
2. *positivité :* $f \geq 0 \Longrightarrow \int_X f d\mu \geq 0$ *et donc* $f \geq g \Longrightarrow \int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$.
3. *homogénéité : pour tout* $\lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$.

Exemple 3.9 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(N), m)$ *où* $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ $m(A) = Card(A)$ *Alors si* $f \in \mathcal{M}_+$, *on a*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

Théorème 3.10 *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ *et* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X$. *Alors*

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Corollaire 3.11 *Si* $a_{ij} \geq 0$ *pour* $i, j = 1, 2 \ldots,$ *alors*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Théorème 3.12 *(Mesure à densité)*
Soit $f : X \to [0, \infty]$ *mesurable positive, et*

$$\phi(E) = \int_E f d\mu, \ (E \in \mathcal{A}).$$

Alors ϕ *est une mesure sur* $\mathcal{A}$, *et pour toute* $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$,

$$\int_X g d\phi = \int_X g f d\mu$$

Application : loi de probabilité à densité, loi de probabilité discrète.

3.3 Notion de " presque partout"

Proposition 3.13 *(Inégalité de Markov)*
Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $a \in]0, \infty[$, alors

$$\mu(f \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu.$$

Definition 3.14 *Un ensemble $A \subset X$ est dite μ négligeable, si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$.*
Une propriété P relative à $x \in X$ a lieu presque partout (en abrégé μ-p.p.) si l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels la propriété P n'est pas vraie est inclus dans un ensemble négligeable. On dit aussi que P a lieu pour μ presque tout x et on omet μ s'il n'y a pas de confusion.

D'aprés la sigma sous additivité, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Proposition 3.15 *Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors $\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0$ p.p.*

Corollaire 3.16 *Soient $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Si $f = g$ p.p. alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$. La réciproque est fausse.*

Corollaire 3.17 *Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Si $\int_X f d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ p.p.*

3.4 Espace des fonctions intégrables

Definition 3.18 *Une fonction f de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est dite μ intégrable, si elle est $\mathcal{A}$ mesurable et vérifie $\int_X |f| d\mu < \infty$.*

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0)$. On a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, et donc f est intégrable si et s.s. f^+ et f^- le sont. De même, si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, f est intégrable si et s.si $\Re f$ et $\Im f$ le sont.

Definition 3.19 *Soit f une fonction μ intégrable. On définit l'intégrale de f par rapport à μ, notée $\int_X f d\mu$ de façon suivante :*
Si f est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, on pose $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.
Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pose $\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + i \int_X \Im f d\mu$.

On observe que si deux fonctions mesurables sont égales μ-p.p., pour que l'une soit intégrable il faut et il suffit que l'autre le soit et elles ont le même intégrale. D'autre part, si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est μ intégrable, elle est finie presque partout. Elle est donc égale presque partout à une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour l'étude de fonctions intégrables on peut se restreindre à des fonctions à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 3.20 *On note $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ l'espace de fonctions μ intégrables à valeurs dans K, où $K = \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

$$\mathcal{L}^1_K(\mu) = \{f : (X, \mathcal{A}) \to (K, \mathcal{B}(K)), \textit{mesurable}, \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Théorème 3.21 *$\mathcal{L}^1_K(\mu)$ est un K espace vectoriel et l'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1_K(\mu)$.*

Proposition 3.22 *Si f, g dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $f \le g$ p.p. , Alors $\int f d\mu \le \int g d\mu$.*

Proposition 3.23 *Si $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$, alors*

$$|\int_X f d\mu| \le \int |f| d\mu.$$

3.5 Integral de Riemann et de Lebesgue.

Lemme 3.24 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, borelienne, bornée et Riemann intégrable. Alors elle est Lebesgue intégrable, et*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Preuve Une fonction est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si les sommes supérieures et inférieures de Darboux convergent vers la même limite, quand la taille de la subdivision de $[a, b]$ tends vers 0. Cela signifie en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ϕ_1, ϕ_2 étagées sur $[a, b]$ telles que

$$\phi_1 \le f \le \phi_2$$

et

$$|\int_a^b \phi_1(x) dx - \int_a^b \phi_2(x) dx| \le \varepsilon.$$

De plus, pour une fonction étagée l'intégrale de Lebesgue et de Riemann coïncident. Par monotonie de l'intégrale de Riemann on a :

$$\int_a^b \phi_1 dx \le \int_a^b f dx \le \int_a^b \phi_2 dx,$$

et par monotonie de l'intégrale de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} \phi_1 d\lambda \le \int_{[a,b]} f d\lambda \le \int_{[a,b]} \phi_2 d\lambda.$$

Les extrémités des deux encadrement coïncident, on en conclut que

$$|\int_a^b f(x) dx - \int_{[a,b]} f d\lambda| \le \varepsilon.$$

Puisque ε est abtitraire, les deux intégrales sont égales. •

Le lemme suivant explique le rapport de l'intégrale de Lebesgue avec intégrale de Riemann généralisée :

Lemme 3.25 *Soit $f : [a, c[\to [0, +\infty[$ borélienne positive et Riemann intégrable sur tout intervalle compact $[a, b] \subset [a, c[$. Alors :*

$$\lim_{b\to c, b<c} \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,c[} f d\lambda. \tag{3.7}$$

En particulier, f a l'intégrale de Riemann généralisée convergente sur $[a, c[$ si et seulement si $\int_{[a,c[} f d\lambda < \infty$, et dans tous les cas

$$\int_a^c f(t)dt = \int_{[a,c[} f d\lambda.$$

Preuve Soit une suite $(b_n)_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < b_n \leq b_{n+1} < c$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = c$. On pose $f_n = f\mathbf{1}_{[a,b_n]}$. On a

$$\int_a^{b_n} f(t)dt = \int_{[a,b_n]} f d\lambda = \int_{[a,c[} f_n d\lambda.$$

La suite des fonctions (f_n) vérifie les conditions du TCM et converge vers f. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,c[} f_n d\lambda = \int_{[a,c[} f d\lambda,$$

d'où3.7 et le lemme. •

A partir de ces lemmes et le théorème de convergence dominée (chapitre suivant), on montre que toute fonction borélienne, localement Riemann intégrable et d'intégrale de Riemann absolument convergente est Lebesgue intégrable et les deux intégrales sont égales.

Lemme 3.26 *Soit $f : [a, c[\to \mathbb{R}$ borélienne, Riemann intégrable et bornée sur tout intervalle compact $[a, b] \subset [a, c[$ et telle que $\int_a^c |f|dx < \infty$. Alors $f \in \mathcal{L}^1([a, c[)$ et*

$$\lim_{b\to c, b<c} \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,c[} f d\lambda. \tag{3.8}$$

$$\int_a^c f(t)dt = \int_{[a,c[} f d\lambda.$$

4 Théorèmes de convergence

4.1 Lemme de Fatou et théorème de convergence monotone

Lemme 4.1 *(lemme de Fatou)*
Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

4.2 Théoréme de convergence dominée.

Théorème 4.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$ mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une fonction g μ -intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \quad p.p.$$

et qu'il existe une fonction f mesurable , telle que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad p.p.$$

Alors f est μ intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Remarque : l'existence de la fonction f mesurable est équivalente à l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty}$ μ-p.p.

Corollaire 4.3 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mu)$ telles que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |u_n| d\mu < \infty.$$

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente μ-p.p. vers une fonction $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ De plus

$$\int u d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u_n d\mu.$$

4.3 Intégrales dépendant d'un paramétre

Soit (E, d) un espace métrique, $K = \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, $g : E \to K$ et $u_\infty \in E$. On rappelle la définition séquentielle de la convergence et de la continuité :

1. $\lim_{u \to u_\infty} g(u) = l$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u_∞ et $u_n \neq u_\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} g(u_n) = g(l)$.
2. g est continue en u_∞ si et s.si, pour toute suite (u_n) convergeant vers u_∞ et $u_n \neq u_\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} g(u_n) = g(u_\infty)$.

Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $f : E \times X \to K$.

Théorème 4.4 *(Théoréme de continuité)*
Soit $u_\infty \in E$. On suppose

(i) pour tout $u \in E$, $x \to f(u, x)$ est mesurable ;

(ii) $u \to f(u, x)$ est continue en u_∞ $\mu(dx)$-p.p.

(iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que, pour tout $u \in E$, $|f(u, x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-p.p.

Alors la fonction $F(u) := \int_X f(u, x)\mu(dx)$ est définie $\forall u \in E$ et est continue en u_∞.

Preuve Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers u_∞ et $u_n \neq u_\infty$. On pose $f_n(x) = f(u_n, x)$ et $f_\infty(x) = f(u_\infty, x)$. Alors $F(u_n) = \int_X f_n d\mu \to F(u_\infty) = \int_X f_\infty d\mu$ par l'application du TCD. •

Exemple 4.5 *Soit $f \in \mathbf{L}^1_K(\lambda)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $F(u) = \int_{]-\infty,u]} f(x)\lambda(dx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
En effet, posons $f(u, x) = f(x)\mathbf{1}_{]-\infty,u]}(x) = f(x)\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(u)$. Pour tout u c'est mesurable en x et pour tout $x \neq u_\infty$ c'est continue en u. Dominée par f.

Théorème 4.6 *(Théoréme de dérivation.)*
Soit I une intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, soit $u_\infty \in I$. Si la fonction $f(u, x)$ vérifie

(i) pour tout $u \in I$, $f(u, .) \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(ii) $\mu(dx)$-p.p., $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe,

(iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que, pour tout $u \in I$, $\mu(dx)$-p.p.

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|,$$

Alors la fonction $F(u) = \int_X f(u, x)\mu(dx)$ est définie en tout point $u \in I$ et et dérivable en u_∞ de dérivée

$$F'(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\mu(dx).$$

Théorème 4.7 *(Théoréme de dérivation globale sur une intervalle ouvert)*
Supposons que

(i) pour tout $u \in I$, $f(u, .) \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$,

(ii) $\mu(dx)$-p.p. $u \to f(u, x)$ est dérivable sur tout l'intervalle I,

(iii) $\mu(dx)$-p.p. pour tout $u \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq g(x)$ où$g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$,

alors la fonction $F(u) := \int_X f(u,x)\mu(dx)$ est définie et dérivable sur tout intervalle I, de dérivée

$$F'(u) := \int_X f(u,x)\mu(dx)$$

est définie et dérivable sur tout intervalle I, de dérivée

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mu(dx).$$

5 Mesure produit. Théorème de Fubini.

5.1 Tribu produit

Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle rectangle mesurable tout élément de $X \times Y$ de la forme $A \times B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(\{A \times B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}).$$

C'est donc la plus petite tribu sur $X \times Y$ qui contient tous les rectangles mesurables.

Proposition 5.1 *Soient $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques définies respectivement par $\pi_X(x,y) = x$ et $\pi_Y(x,y) = y$. Alors la tribu produit est la plus petite tribu sur $X \times Y$ qui rend π_X et π_Y mesurables.*

Proposition 5.2 *Soit $f : (Z,\mathcal{C}) \to (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, $f(z) := (f_X(z), f_Y(z))$. Alors f est $(\mathcal{C}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ mesurables si et seulement si f_X et f_Y sont respectivement $(\mathcal{C},\mathcal{A})$ et $(\mathcal{C},\mathcal{B})$ mesurables.*

Proposition 5.3 *La tribu borélienne de R^2 coïncide avec la tribu produit de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ avec elle même :*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

5.2 Sections

Soit $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On définit les sections de C par

$$C_x := \{y \in Y,\ (x,y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X,\ (x,y) \in C\}.$$

Proposition 5.4 *$\forall x \in X, C_x \in \mathcal{B}$ et $\forall y \in Y, C^y \in \mathcal{A}$.*

Preuve La proposition est vraie pour les rectangles. Considérer ensuite la collection des éléments $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pour lesquels la proposition est vraie. Elle forment un tribu, contenant les rectangles, donc elle contient $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. •

Corollaire 5.5 *Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$, ou $\mathcal{C}$, borélienne. Alors $\forall x \in X$, $f_x(y) := f(x,y)$ est $\mathcal{B}$ mesurable et $\forall y \in Y$, $f^y(x) := f(x,y)$ est $\mathcal{A}$ mesurable.*

5.3 Mesure produit.

Definition 5.6 *Une mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ est dite σ-finie, s'il existe une suite croissante $(E_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant*

$$X = \cup_n E_n \quad \text{et} \quad \forall n \quad \mu(E_n) < \infty.$$

Théorème 5.7 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*

– *Il existe une unique mesure m sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant*

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A) \times \mu(B).$$

Cette mesure est σ-finie. On la note par $\mu \otimes \nu$.

– *Pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $m(C) = \int_X \nu(C_x)\mu(dx) = \int_Y \mu(C^y)\nu(dy)$.*

5.4 Théorémes de Fubini.

Il y a deux théorées de Fubini : l'un pour les fonctions positives et l'autre pour les fonctions intégrables. Dans les applications on utilise le premier pour vérifier les hypothéses du second.

Théorème 5.8 *(Fubini-Tonelli) Soient $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies, respectivement sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$.*

a) Les fonctions partout définies $x \to \int_Y f(x,y)\nu(dy)$ et $y \to \int_X f(x,y)\mu(dx)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ mesurables.

b) $\int_{X\times Y} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) = \int_Y(\int_X f(x,y)\mu(dx))\nu(dy) = \int_X(\int_Y(f(x,y)\nu(dy))\mu(dx)$. (Ces égalités ont lieu dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 5.9 *(Fubini-Lebesgue) On considére les espaces mesurés du théoréme précédent. Soit $f \in \mathbf{L}^1_K(\mu \otimes \nu)(K = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{C}$.) alors*

a) $\mu(dx) - p.p.\ y \to f(x,y) \in \mathbf{L}1_K(\nu)$,
$\nu(dx) - p.p.\ x \to f(x,y) \in \mathbf{L}^1_K(\mu)$.

b) $x \to \int_Y f(x,y)\nu(dy) \in \mathbf{L}^1_K(\mu)$, et $y \to \int_X f(x,y)\mu(dx) \in \mathbf{L}^1_K(\nu)$,

c) $\int_{X\times Y} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) = \int_Y(\int_X f(x,y)\mu(dx))\nu(dy) = \int_X(\int_Y(f(x,y)\nu(dy))\mu(dx)$.

References

[1] M. Briane, G. Pagés, "Théorie de l'intégration." Vuibert supérieur

[2] W. Rudin, "Real and complex analysis"

[3] R. Jean, "Mesure et Intégration", les presses de l'université de Québec