ENSIIE - Intégration **Année 2016-2017.**

Calcul intégral. Examen du 12/01/2017.

Durée : 3h. Calculatrices, téléphones et documents interdits. Formulaire A4 recto autorisé. Tous les résultats doivent être soigneusement justifiés. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Exercice I Soit f une fonction mesurable positive.

a/ Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mu(f \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_X f d\mu.$$

c/ Déduire que si $\int_X f d\mu < +\infty$, alors $f < +\infty$ *p.p.*.
Indication : montrer que

$$\{x \in X,\ f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X,\ f(x) > n\}.$$

et utiliser la monotonie de μ.

Exercice II Soit f une fonction réelle borélienne sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)dx < +\infty. \tag{1}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx$.
2) Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(nx)$ est intégrable sur $[0, 1]$.
3) En déduire

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(nx)}{n^2} = 0 \quad dx - p.p.$$

4) *Application :* Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \notin \mathbb{Z} \quad f(x) = [\ln(|\sin(\pi x)|]^2 \text{ et } \quad \forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) = 0,$$

vérifie les hypothèses de l'exercice.

4) En déduire que $\lim_{n\to\infty} |\sin(n\pi x)|^{1/n} = 1\ dx - p.p.$
5) Montrer que la limite ci-dessus n'a lieu pour aucun $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice III Montrer que la fonction

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : Décomposer l'intégrale en somme des intégrales sur $[\pi k, \pi(k+1)]$; $k \in \mathbb{N}$. Minorer la fonction sur chacun de ces intérvalles en tenant compte de $\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin x| dx = const.$
Le but de l'exercice suivant est de montrer que l'intégral semi-convergente de Riemann $\int_0^\infty h(x)dx$ existe et déterminer sa valeur.

Exercice IV On pose, pour $t > 0$,

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

- Montrer que H est continue sur $]0, \infty[$ et calculer $\lim_{t\to\infty} H(t)$.
- Montrer que H est dérivable sur $]0, \infty[$ et calculer sa dérivée.
- En déduire que pour tout $t > 0$,

$$H(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

- Montrer que, pour $t > 0$,

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{1+tx}{x^2}(1-\cos x)dx.$$

- Montrer que

$$\sup\{ye^{-y};\ y \geq 0\} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx < \infty.$$

- Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

- En déduire la valeur de l'intégrale semi-convergente de Riemann :

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$