ENSIIE | **2A**
$2^{\text{ème}}$ semestre | **Calcul stochastique**

Processus de Poisson

Exercice 1.
Des clients arrivent dans une banque à un rythme poissonien de taux $\lambda > 0$. Supposons que deux clients arrivent durant la première heure. Quelle est la probabilié que
- les deux soient arrivés durant les 20 premières minutes ?
- L'un au moins soit arrivé pendant les 20 premières minutes ?

Exercice 2.
L'alimentation en électricité d'une usine dépend du fonctionnement d'un transformateur.
La durée de vie T, exprimée en années, de ce type de transformateur suit une loi exponentielle de paramètre 1. Si le transformateur tombe en panne il est immédiatement remplacé par un transformateur identique pour ne pas interrompre la production de l'usine.

a) Quelle est la probabilié d'utiliser plus de trois transformateurs sur une période de 2 ans ?
b) Au bout de trois ans, un seul transformateur est tombé en panne et le second fonctionne encore. Quelle est la loi de X, date de la seconde panne ?
c) On suppose que l'on ne dispose que de cinq transformateurs pour une periode de 7 ans. Exprimer la probabilité que l'usine ne puisse pas fonctionner correctement pendant les sept prochaines années et en donner une évaluation à l'aide du théorème de la limite centrale.

Exercice 3.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{S_n\in[0,t]} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de $(S_1, ..., S_n)$?
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la loi de $(S_1, ..., S_n)$ sachant que $N_t = n$.

Exercice 4.
Le nombre $N(t)$ de versements d'indemniés effectués par une compagnie d'assurance en t jours est donné par un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$. On note T_i le temps écoulé, compté en jours, jusqu'au $i^{\text{ème}}$ versement. On suppose que le montant du $i^{\text{ème}}$ versement est une variable aléatoire Y_i suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose que les Y_i sont indépendants entre eux et de $N(t)$.
a) Calculer la fonctin génératrice de Y_1.
b) Calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire suivante $U_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$.
c) On suppose que $\mathbb{E}[Y_1] = 1000$ Euros. Calculer l'espérance et la variance de U_t.
Sachant que cette compagnie d'assurance compte 100000 clients, quelle prime minimum doit-elle demander à chacun pour ne pas perdre d'argent en moyenne ?

Exercice 5.
Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus de Poisson. Montrer que pour $0 \leq s < t$ et $n \in \mathbb{N}$, la loi de N_s sachant que $N_t = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{s}{t}$.

Exercice 6.
Des appels arrivent à un central téléphonique suivant un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, les communications sont établies dès leur arrivée.
a) Quelle est la probabilité d'avoir deux appels arrivant simultanément ?

b) Si, les communications ont une durée de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et qu'à un instant donné il y a n communications en cours, quelle est la distribution du premier instant où l'une d'entre elles prend fin ?

c) On suppose que les durées de communications ne prennent que deux valeurs a et b ($0 < a < b$) avec probabilité p et $1-p$ respectivement. Calculer la distribution de L_t, le nombre de communications à l'instant t. Montrer que la variable $L(t)$ converge en distribution quand t tend vers l'infini.

Exercice 7.
On suppose qu'un arrêt de bus est désservi à un rythme Poissonien d'intensité $\lambda > 0$. On note T_n l'instant de passage du $n^{\text{ème}}$ bus, avec $T_0 = 0$. Un usager de cette ligne arrive à l'arrêt de bus à l'instant $t > 0$. On note Z_t le temps écoulé entre le dernier passage de bus et l'arrivée de l'usager et A_t le temps d'attente de l'usager.

a) Calculer la loi du couple (A_t, Z_t). En déduire que A_t et Z_t sont indépendants.

b) Donner les lois de A_t et Z_t. En déduire que Z_t a la même loi que $\min(T_1, t)$ et que Z_t tend en loi vers T_1 lorsque t tend vers $+\infty$

c) Calculer $\mathbb{E}[Z_t + W_t]$ et donner sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

d) Quelle est l'espérance du temps d'attente de l'usager ?

Exercice 8.
Soit N_t^λ et N_t^μ des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Le cours d'une obligation à l'instant t vaut $X_t = N_t^\lambda - N_t^\mu$.

a) Représenter l'évolution de X_t au cours du temps.

b) Calculer la fonction génératrice de X_t.

c) En déduire l'espérance et la variance de X_t.

Exercice 9.
Un cable de n km presente des défaults répartis selon un processus de Poisson d'intensité λ. On suppose que le coût de la réparation d'un défault situé à une distance d de l'extrémité du cable est d^α où $\alpha > 0$.
Quelle est l'espérance du coût de réparation de la totalité du cable ?

Exercice 10.
Durant un match de football opposant deux équipes A et B, le nombre de tirs au but en une minute réalisés par l'équipe A et par léquipe B suivent des processus de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

a) Montrer que le nombre de tirs au but suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En déduire l'espérance du nombre de tirs au but pour une partie.

b) On suppose que lors d'un tir l'équipe A marque avec une probabilité $p_A \in]0, 1[$ et léquipe B avec une probabilité p_B indépendament des autres tirs. Montrer que le nombre de buts marqués par l'équipe A suit un processus de Poisson de paramètre λp_A.

c) Quelle est la probabilité que A gagne la partie ? Qu'il y ait match nul ?

Exercice 11.
Des groupes de messages électroniques arrivent à un serveur informatique à un rythme Poissonien de paramètre $\lambda > 0$. Le $n^{\text{ème}}$ groupe comprend X_n messages. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est i.i.d. et indépendante du processus de Poisson. On note $Y(t)$ le nombre total de messages arrivés jusqu'à l'instant t.

a) Quelle est la distribution des instants d'arrivées des groupes d'au moins 10 messages ?

b) Quelle est la probabilité quentre 0 et t il n'arrive aucun groupe de taille supérieure à 10 et 1 seul de taille 1 ?

c) Calculer la transformee de Laplace de $Y(t)$.

d) Montrer que le processus $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ possède la propriété des accroissements independants.