Brownian Motion

Exercice 1 (Gaussian Variables).
Let X be a Gaussian random variable with expectation m and variance σ^2.

a) (Moments) Assume that $m = 0$. Compute the following expectations :

$$\mathbb{E}[\mid X \mid],\ \mathbb{E}[X^3],\ \mathbb{E}[\mid X \mid^3] \text{ et } \mathbb{E}[X^4].$$

b) (Laplace Transform) Prove that, for all $\lambda \in \mathbb{R}$, we have

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = e^{\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}.$$

c) (Sum of independent Gaussian variables) Let Y be a Gaussian random variable, independent of X, give the law of $X + Y$.

d) (Convergence L^2) Let $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of Gaussian variables which converges to X in L^2. Prove that the law of X is a Gaussian one ?

e) (Price of an European call) For $m = 0$, compute $\mathbb{E}[e^{-rT}\left(e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sqrt{T}X} - K\right)^+]$.

Exercice 2 (Gaussian Vector).

a) Soit $(X,\ Y)$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}[XY] = 0$. Montrer que X et Y sont indépendants.

b) Montrer que $(X,\ Y)$ est gaussien ssi Y est une variable gaussienne et la loi de X conditionnellement à Y est $\mathcal{N}(aY + b,\ \sigma)$ avec σ indépendante de Y.

Exercice 3 (Espérances conditionnelles).

a) Montrer que $\mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]]$.

b) Soit $X \in \mathrm{L}^2$ tel que $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ et $Y^2 = \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}]$. Montrer que $X = Y$.

c) Soit $X > 0$ indépendante de Y. Quelle est la loi de XY conditionnellement à X.

d) Soit X une variable gaussienne, indépendante de $\mathcal{F}$ et Y une variable $\mathcal{F}$-mesurable. On pose $Z = X + Y$, calculer

$$\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}], \quad \mathrm{Var}(Z \mid \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[e^{\lambda Z} \mid \mathcal{F}].$$

e) Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et $A \in \mathcal{F} - \mathcal{G}$. On pose $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{G}, A)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \}]}\mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A^c} \mid \mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A^c} \mid \}]}\mathbb{1}_{A^c}.$$

(On admettra que pour tout X, il existe Y_1 et Y_2 $\mathcal{G}$-mesurables tels que

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = Y_1\mathbb{1}_A + Y_2\mathbb{1}_{A^c}.)$$

Exercice 4 (Calcul d'espérances).
Calculer les espérances suivantes :

$$\mathbb{E}[B_sB_t^2],\ \mathbb{E}[B_s^2B_t^2],\ \mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s],\ \mathbb{E}[B_t \mid B_s],\ \mathbb{E}[e^{\alpha B_t}\int_0^t e^{\gamma B_s}\, ds]$$

Exercice 5 (Quelques martingales).
Soient $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. Les processus suivants sont-ils des $\mathbb{F}$-martingales ?

a) $M_t = B_t^3 - \alpha\int_0^t B_s\, ds$ b) $Z_t = B_t^3 - \alpha t B_t$

c) $X_t = tB_t - \int_0^t B_s\, ds$ d) $Y_t = t^\alpha B_t - \beta\int_0^t B_s\, ds.$

Exercice 6 (Quelques mouvements Browniens).
Parmi les trois processus suivants, lesquels sont des mouvements browniens ?

a) $X_t = \sqrt{t}B_1$
b) $Y_t = 2\left(B_{1+\frac{t}{4}} - B_t\right)$
c) $Z_t = B_{2t} - B_t$

Exercice 7 (Pont Brownien).
Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $Z_t = B_t - tB_1$.

a) Montrer que Z est un processus gaussien indépendant de B_1 et préciser sa loi.
b) Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $\tilde{Z}_t = B_{1-t} - (1-t)B_1$. Montrer que $\tilde{Z} \overset{\mathcal{L}}{=} Z$.
c) Montrer que $Z_t \overset{\mathcal{L}}{=} B_t \mid B_1 = 0$.
c) Pour $0 \leq t < +\infty$, on pose $Y_t = (t+1)Z_{\frac{t}{t+1}}$. Montrer que Y est un mouvement brownien.

Exercice 8 (Pont Brownien (2)).
Pour $t \geq 0$, on pose $Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, ds$.

a) Montrer que Z est un mouvement Brownien indépendant de B.
b) Montrer que Z n'est pas un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien.

Exercice 9 (Changement de probabilité).
Pour $t \geq 0$, on pose $L_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ et $W_t = B_t - \sigma t$. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$. Montrer que W est un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien.

Exercice 10 (Temps d'atteinte).
Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : \ B_t = a\}$.

a) Montrer que T_a est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.
b) Montrer que $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$, $\mathbb{E}[T_a] = \infty$ et calculer la transformée de Laplace de T_a.
c) En inversant la transformée de Laplace, montrer que la loi de T_a admet la densité suivante :

$$f(x) = \frac{\mid a \mid}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

d) Soit $X = \inf_{s \leq T_1} B_s$. Quelle est la loi de X ?

Exercice 11 (Brownien réfléchi).
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit le Brownien réfléchi en a par

$$X_t^a = \begin{cases} B_t & \text{si} \quad t \leq T_a \\ 2a - B_t & \text{si} \quad t > T_a \end{cases}$$

a) Montrer que X^a est un mouvement Brownien.
b) Pour $b > 0$ et $a \leq b$, montrer que

$$\mathbb{P}(S_t > b; B_t < a) = \mathbb{P}(B_t < a - 2b), \quad \text{où } S_t = \sup_{u \in [0,t]} B_u.$$

En déduire la loi du couple $(S_t,\ B_t)$.

c) En déduire la loi de T_a.
d) Donner la loi de $S_t - B_t$ et $2S_t - B_t$ à t fixé
e) Montrer que à t fixé, S_t et $|B_t|$ ont même loi.

Exercice 12 (Scaling).
Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : \ B_t = a\}$.

a) Montrer que $T_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{S_1^2}$, où $S_1 = \sup_{u \leq 1} B_u$
b) Montrer que $T_a \overset{\mathcal{L}}{=} a^2 T_1$.