Intégrale de Wiener

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard de filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1. Intégrale de Wiener
Soit $f :\in \mathrm{L}_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Donner la loi de $\left(\int_0^t f(s)\, dB_s\right)_{0\leq t}$.

Exercice 2. Exemple
On pose $X_t = \int_0^t \sin(s)\, dB_s$.

a) Montrer que X est bien définie.
b) Montrer que X est un processus gaussien et préciser sa loi.
c) Calculer $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$.
e) Montrer que $X_t = (\sin t)B_t - \int_0^t \cos(s)B_s ds$.

Exercice 3. Pont Brownien
Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $X_t = \int_0^t \frac{X_s}{s-1}\, ds + B_t$.

a) Montrer que
$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$$
b) Montrer que X est un processus gaussien indépendant de B_1 et préciser sa loi.
c) Montrer que $\lim_{t\to 1} X_t = 0$

Exercice 4. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck
Soit $a,\ \sigma \in \mathbb{R}$ et V_0 une variable aléatoire réelle gaussienne indépendante de B. Pour $t \geq 0$, on pose
$$V_t = V_0 - \int_0^t aV_s\ ds + \sigma B_t.$$

a) Montrer que
$$V_t = e^{-at}V_0 + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)}\, dB_s.$$
b) Donner la loi de V.
c) Soit $t \geq 0$. Donner la loi de $\int_0^t V_s\, ds$.

Exercice 5. Modèle de Vasiceck
Soit $a,\ b,\ r_0,\ \sigma \in \mathbb{R}$. Pour $t \geq 0$, on pose
$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)\ ds + \sigma B_t.$$

a) Montrer que $V_t = r_t - b$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. En déduire la loi de r et celle de $\int_0^t r_s\, ds$..
b) Montrer que r est Markovien et donner la loi de r_t conditionnellement à r_s avec $s \leq t$.
c) Calculer le prix, à la date $t \geq 0$, d'un zéro-coupon de maturité T et de taux r.