Théorème de Girsanov

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard de filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1. Temps d'atteinte

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : \; B_t + \mu t = a\}$.

a) Donner la loi de T_a.

b) Soit S un brownien géométrique. On pose $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : \; S_t = a\}$. Donner la loi de τ_a.

c) En déduire le prix d'une option digitale dans le modèle de Black & Scholes.

Exercice 2. Options d'échange

a) Pour $i = 1, 2$, on note S^i une solution de $dS_t = S_t^i \left(rdt + \sigma_i dB_t^i\right)$, où B^1 et B^2 sont deux browniens standard de coefficient de corélation ρ. Calculer le prix d'une option (européenne) d'échange entre les actifs 1 et 2.

b) Soit S solution de $dS_t = S_t\,(rdt + \sigma dB_t)$. On pose
$$K_t = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln(S_u)\,du\right).$$
Calculer la quantité suivante $\mathbb{E}[e^{-rT}\,(Z_T - S_T)^+]$.

Exercice 3. Symétrie Call-Put

Soit S solution de $dS_t = S_t\,((r-\delta)dt + \sigma dB_t)$. On note $C(x, K, r, \delta)$ (resp. $P(x, K, r, \delta)$) la fonction de valeur initiale du call (resp. put) européen de strike K, sur le sous-jacent S tel que $S_0 = x$ dans un marché où le taux sans risque est r. Montrer que
$$C(x, K, r, \delta) = P(K, x, \delta, r)$$

Exercice 4. Volatilité stochastique

Soient B et W deux browniens indépendants et $\mathbb{F}$ la filtration engendrée par B et W. Soient $(S,\ Y)$ solution de
$$\begin{cases} dS_t &= S_t\,(\mu(t)dt + \sigma(Y_t)dB_t)\,,\ S_0 = x \\ dY_t &= \eta(t)dt + \gamma(Y_t)dW_t,\ Y_0 = 1, \end{cases}$$
où μ, σ, η et γ sont des fonctions déterministes.

a) Rappeler le théorème de Girsanov multidimensionnel.

b) Montrer que le marché n'est pas complet. On notera $\mathcal{Q}$ l'ensemble des probabilités risque neutre.

c) Soit X un actif contingent ($\mathcal{F}_T$-mesurable) réplicable. On sait qu'il existe ϕ adapté et borné définissant une stratégie de portefeuille autofinancé dont le processus de richesse est solution de
$$\begin{cases} dV_t = rV_t dt + \phi_t\,(dS_t - rS_t dt) \\ V_T = X \end{cases}$$
Montrer que pour tout $\mathbb{Q}$ probabilité risque neutre, $(e^{-rt}V_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

d) En déduire que $V_t = v(t, S_t, Y_t)$ où v est solution d'une EDP que l'on précisera.

Exercice 5. Taux de change (Ingersoll 1997)
Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ solution de l'EDS suivante :

$$dZ_t = \sigma(Z_t - a)(b - Z_t)dB_t, \quad Z_0 = z \in (a,\ b) \text{ où } 0 < a < b \text{ et } 0 < \sigma.$$

On admettra que cette équation admet une unique solution strictement comprise entre a et b.

a) Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur (a, b), donner une condition sur ϕ pour que $\phi(Z_t)$ ait une volatilité déterministe.

b) On posera dans la suite $\phi(z) = \frac{z-a}{b-z}$ et $U_t = \phi(Z_t)$. Calculer la différentielle de U.

c) On pose $M_t = \frac{b-Z_t}{b-z}$. Montrer que M est une martingale strictement positive d'espérance 1. En déduire l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$ telle que U soit un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

d) Calculer le prix d'un call de strike K sur un taux de change de valeur Z_t à la date t.