

Cours de Calcul Stochastique

CHEVALIER

24 mai 2011

Table des matières

1	Processus stochastiques	3
1.1	Généralités	3
1.2	Martingales	4
1.2.1	Définition	4
1.2.2	Martingales de carré intégrable	4
1.2.3	Martingales et temps d'arrêt	6
1.3	Processus de Markov	7
1.4	Processus de Poisson	7
1.5	Processus gaussiens	11
1.6	Mouvement brownien	13
1.6.1	Définition	13
1.6.2	Mouvement brownien et processus gaussiens	16
1.6.3	Mouvement brownien et martingales	18
1.6.4	Propriété de Markov	20
1.6.5	Temps d'atteinte	20
1.6.6	Propriété des trajectoires	23
2	Intégrales stochastiques	25
2.1	Intégrale de Wiener	25
2.1.1	Brownien géométrique	28
2.1.2	Processus d'Ornstein Uhlenbeck	29
2.2	Intégrales d'Itô	32
2.3	Processus d'Itô	34
2.3.1	Généralités	34
2.3.2	Crochet oblique	35
2.3.3	Lemme d'Itô	36
2.3.4	Équation différentielle stochastiques (EDS)	38
3	Changement de probabilité	42
3.1	Probabilités équivalentes	42
3.2	Théorème de Girsanov	43
3.3	Théorème de représentation des martingales	44
4	Applications en finance	45
4.1	Marchés financiers	45
4.2	Portefeuille	45
4.3	Valorisation d'option	47
4.4	Couverture de l'option	47

Introduction

1. Représentation des prix

Comment définir un processus stochastique ?

2. Valorisation et couverture d'actif

(ϕ_t) processus de portefeuille

H_T actif contingent, variable aléatoire positive.

ϕ autofinancé :

$$V_t = \phi_t S_t$$

$$V_{t+dt} - V_t = \phi_t (S_{t+dt} - S_t)$$

$$V_t = V_0 + \int_0^t \phi_s dS_s$$

$$V_n = V_0 + (\phi : S)_n$$

Il faut définir la notion d'"intégrale stochastique", c'est à dire $\int_0^t \phi_s dS_s$.

Si H_T est simulable, $H_T = V_0 + \int_0^T \phi_0 dS_s$. Il faut introduire du calcul différentiel stochastique : " $\phi_t = \frac{\partial H}{\partial S}$ " Lemme d'Itô.

Le prix de l'option sur H_T est :

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E} \left[\tilde{H}_T - \int_0^T \varphi_0 d\tilde{S}_s \right] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{H}_T] - \mathbb{E} \left[\int_0^T \varphi_s d\tilde{S}_s \right] \end{aligned}$$

Il faut trouver une probabilité sous laquelle $\int_0^T \varphi_s d\tilde{S}_s$ sont des martingales (Théorème de Girsanov)

Chapitre 1

Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace de probabilité

1.1 Généralités

Définition 1

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus stochastique si et seulement si X_t est une variable aléatoire.

Remarque Si X est un processus stochastique,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\mapsto X(\omega) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d \\ X : \Omega &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \\ \omega &\mapsto X(\omega) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d \\ &\quad t \mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

A un évènement ω , le processus associe une fonction de $\mathbb{R}^+$.

Définition 2

On dit que X est continu (respectivement monotone, cadlag, caglad) si pour tout ω , la fonction $X_t(\omega)$ est continue (respectivement monotone, cadlag, caglad).

Définition 3

Une filtration est une famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ indexée par $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \forall t \leq s$$

Soit X un processus, la filtration naturelle de X est la filtration engendrée par le processus X :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^X &= \sigma(X_s : s \leq t) \\ &= \text{la plus petite tribu engendrée par } X_s^{-1}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad s \leq t \end{aligned}$$

La filtration est dite **complète** si et seulement si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles de probabilité nulle.

La filtration est dite **continue** si et seulement si $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$

Définition 4

X est $\mathcal{F}$ -adapté si et seulement si pour tout t , X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. (Si l'on dispose de l'information $\mathcal{F}_t$, on connaît la valeur de X_t)

Si X est continu à gauche, alors on sait qu'il est prévisible.

Définition 5

- X et Y sont égaux presque sûrement si $\forall t, X_t = Y_t$
- $X = Y$ en loi si $\forall n, \forall t_1 < \dots < t_n, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$

$(X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_t \mid X_{t+\epsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_{t+\epsilon})$. A ω fixé, les propriétés de $t \rightarrow X_t$ n'ont rien à voir avec celles de $t \rightarrow Y_t$

1.2 Martingales

Soit $\mathbb{F}$ une filtration.

1.2.1 Définition

Définition 6

Un processus M est une martingale si et seulement si

- i) M est $\mathbb{F}$ -adapté
- ii) $\forall t, M$ est intégrable : $\mathbb{E}[M_t] < +\infty$
- iii) $\forall s \leq t, \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$

Si $M_t \in \mathbb{R}$, on peut définir les notions de sous et sur-martingales.

Remarque

- i) Si M est une martingale, on a : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.
- ii) Soit X une variable aléatoire intégrable. $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$ est une martingale.
- iii) Soit X un processus à accroissements indépendants ($\forall t_1 < t_2 < t_3, X_{t_3} - X_{t_2} \perp X_{t_2} - X_{t_1}$) et $\mathbb{F}$ -adapté. $M_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$ est une martingale.

M est $\mathbb{F}$ -adapté et intégrable

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_t] \\ &= M_s - X_s + \mathbb{E}[X_s] + \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_t] \\ &= M_s + \mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_t - X_s] \\ &= M_s + \mathbb{E}[X_t - X_s] - \mathbb{E}[X_t - X_s] \\ &= M_s \end{aligned}$$

1.2.2 Martingales de carré intégrable

Définition 7 Une martingale M est de carré intégrable si $\mathbb{E}[M_t^2] < +\infty \quad \forall t$

Propriété

- i) Si $M \in L^2$, $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}] \quad \forall s \leq t$
- ii) Si $M \in L^2$, ses accroissements sont orthogonaux.

Preuve

i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_s^2 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - M_s^2\end{aligned}$$

ii) Soient $t_1 < t_2 < t_3$, montrons que $\mathbb{E}[(M_{t_3} - M_{t_2})(M_{t_2} - M_{t_1})] = 0$:

$$\mathbb{E}[(M_{t_3} - M_{t_2})(M_{t_2} - M_{t_1})] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[M_{t_3} - M_{t_2} \mid \mathcal{F}_{t_2}]}_{=0 \text{ car } M \text{ martingale}} \times (M_{t_2} - M_{t_1})]$$

Notation On notera $M^2([0, T])$ l'ensemble des martingales continues de carré intégrable.

Propriété Inégalité de Doob

Soit $M \in M^2([0, T])$, $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (M_t)^2 \right] \leq 4\mathbb{E} [|M_T|^2]$

Preuve Utiliser $\left(M_{\frac{Kt}{N}} \right)_{K \in [0, N]}$

Exemple 1 Soit $M \in M^2([0, T])$ définie par $M_t = \int_0^t \varphi_s ds$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}[M_0] = 0 \\ \mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \varphi_s ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}} \varphi_s ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} M_{\frac{(k+1)t}{n}} - M_{\frac{kt}{n}} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(M_{\frac{(k+1)t}{n}} - M_{\frac{kt}{n}} \right)^2 \right] \quad (\text{orthogonalité des accroissements}) \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n \left(\int_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}} \varphi_s ds \right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(\int_a^b f \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2$$

Preuve $\left(\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_k) \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sum (f(x_k))^2$ convexité du carré

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^2] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n \frac{t}{n} \int_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}} \varphi_s^2 ds \right] \\ &\leq \frac{t}{n} \mathbb{E} \left[\int_0^t \varphi_s^2 ds \right] \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}[M_t^2] = 0$ et $M_t = 0$ ps.

1.2.3 Martingales et temps d'arrêt

Définition 8 Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$. On note $\mathbb{F}_\tau$ la tribu des événements antérieurs à τ . $\mathbb{F}_\tau = \sigma(\{A \subset \Omega, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t\})$

Propriété

1. τ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable
2. τ et ν 2 temps d'arrêt ; $\tau \wedge \nu$ est un temps d'arrêt
3. $\tau \leq \nu$ alors $\mathbb{F}_\tau \subset \mathbb{F}_\nu$
4. Si X un processus $\mathbb{F}$ -adapté et continu à gauche, alors X_τ est $\mathbb{F}_\tau$ -mesurable

Définition 9 Un processus X est uniformément intégrable si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (\sup_t \mathbb{E}[|X_t| 1_{|X_t| > a}]) < +\infty$$

Remarque S'il existe Y intégrable tel que $\forall t, X_t \leq Y$ p.s., alors X est uniformément intégrable et continu.

Théorème 1.2.1 Théorème d'arrêt de Doob (Optional sampling theorem)

Si M est une martingale, uniformément intégrable, alors pour tout $\nu \leq \tau$, deux t.a.,

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\nu] = M_\nu$$

Si M n'est pas uniformément intégrable, mais que $\nu \leq \tau < K$ (où K est une constante), le résultat reste vrai.

Conséquence Soit M un processus $\mathbb{F}$ -adapté, continu, intégrable, M est une martingale ssi $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] \quad \forall \tau$ t.a.

Remarque Si $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] \quad \forall t$, M n'est pas nécessairement une martingale.

C.E. Soit M une martingale continue intégrable, $M_0 = 0$. Soit X tel que $X_t = \int_0^t M_u du$

$$\begin{aligned} \text{Soit } t \geq 0 \quad \mathbb{E}[X_t] &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \mathbb{E}[M_u] du \\ &= 0 \quad (\text{car } M_u = M_0 = 0) \\ &= X_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } t > s \quad \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[\int_s^t M_u du + \underbrace{\int_0^s M_u du}_{\mathcal{F}_s\text{-mes}} | \mathcal{F}_s \right] \\ &= X_s + \mathbb{E} \left[\int_s^t M_u du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= X_s + \int_s^t \mathbb{E}[M_u | \mathcal{F}_s] du \\ &= X_s + \underbrace{(t-s)M_s}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Définition 10 *Un processus M est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \in \mathbb{R}^+}$ soient des martingales.*

Propriété

- i) Une martingale locale positive (à valeur dans $\mathbb{R}$) est une sur-martingale.
- ii) Une martingale locale, uniformément intégrable, est une martingale.

1.3 Processus de Markov

Définition 11 *Un processus de Markov est un processus dont le futur ne dépend que de sa valeur présente.*

Soit X un processus. Il est markovien si :

$$\forall t_1 < \dots < t_n, \mathcal{F} \text{ bornée, } \mathbb{E}[\mathcal{F}(X_{s+t_1}, \dots, X_{s+t_n}) | \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[\mathcal{F}(X_{s+t_1}, \dots, X_{s+t_n}) | \sigma(X_s)]$$

Propriété de Markov forte. On dit que X vérifie la propriété de Markov forte ssi $\forall \nu < \tau$ t.a., f bornée : $\mathbb{E}[f(X_\tau) | \mathcal{F}_\nu^X] = \mathbb{E}[f(X_\tau) | X_\nu]$

Rappel

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n &= \mathbb{E}[f(\tilde{S}_N) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[f(S_N) | S_n] \\ &= v(n, S_n) \end{aligned}$$

Propriété Soit X uniformément intégrable, un processus à accroissements indépendants, X vérifie la propriété de Markov forte.

Idée de démonstration Soient $\nu \leq \tau$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_\tau) | \mathcal{F}_\nu^X] &= \mathbb{E}[f(X_\tau - X_\nu + X_\nu) | \mathcal{F}_\nu^X] \\ &= \psi(X_\nu) \text{ car } X_\tau - X_\nu \text{ indépendant de } \mathcal{F}_\nu^X \end{aligned}$$

où $\psi(x) = \mathbb{E}[f(X_\tau - X_\nu + x)]$

1.4 Processus de Poisson

C'est un processus qui donne la répartition dans le temps d'évènements spécifiques.

Exemples 1

Files d'attente : N_t = le nombre de clients arrivés au guichet d'une banque, à un serveur, à un péage, ... entre 0 et t .

Radioactivité : N_t le nombre d'atomes dégradés entre 0 et t .

Fiabilité : N_t le nombre de pannes entre 0 et t .

Paris sportifs : N_t le nombre de buts marqués entre 0 et t .

Finance : N_t le nombre de "sauts" (=dégradation de notes, ...) entre 0 et t dans la trajectoire d'un actif; ou N_t le nombre d'ordres reçus par un trader entre 0 et t .

Définition 12 Un processus de poisson est un processus N tel que :

$$N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{\tau_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{\sum_{i=0}^n \delta_i \leq t\}}$$

où $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ ($\tau_0 = 0$)

Rappel X suit $\mathcal{E}(\lambda)$ si sa densité est : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$

Propriété Absence de mémoire

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\mathbb{P}(X \geq t + s | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s)$

Preuve

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(X \geq t + s | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + s; X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq t + s)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{\int_{t+s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X \geq s) \end{aligned}$$

Propriété Somme de variables exponentielles i.i.d.

Soient $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{E}(\lambda)$. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. C'est à dire de densité $f(x) = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$

Rappel Pour montrer l'égalité en loi, il faut montrer une des égalités suivantes :

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- Fonction caractéristique : $\psi(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$
- Fonction génératrice (transformée de Laplace) : $G(u) = \mathbb{E}[e^{uX}]$

En pratique la première est plus dure à montrer.

Preuve Calculons la transformée de Laplace de S_n :

$$\begin{aligned} G(u) &= \mathbb{E}[e^{uS_n}] \quad \text{pour } u < \lambda \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{uX_i}\right] \\ &= (\mathbb{E}[e^{uX_1}])^n \quad \text{car les } X_i \text{ sont i.i.d.} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \lambda e^{(u-\lambda)x} dx\right)^n \\ &= \left(-\frac{\lambda}{u-\lambda}\right)^n \end{aligned}$$

Calculons la transformée de Laplace de $\Gamma(n, \lambda)$:

$$\begin{aligned}
 G_\Gamma(u) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} e^{(u-\lambda)x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx}_{I_n} \quad \text{pour } 0 \leq u \leq \lambda \\
 &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} d\left(\frac{e^{(u-\lambda)x}}{u-\lambda}\right) \\
 &= -\frac{\lambda^n}{u-\lambda} \int_{\mathbb{R}^+} e^{(u-\lambda)x} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} dx \\
 &= -\frac{\lambda}{u-\lambda} I_{n-1} \\
 &= \left(-\frac{\lambda}{u-\lambda}\right)^n
 \end{aligned}$$

Caractérisation du processus de Poisson.

(N) est un processus de Poisson de paramètre λ ssi

- i) $N_0 = 0$
- ii) Les accroissements sont indépendants et stationnaires :

$$\forall t, s \geq 0 \begin{cases} N_{t+s} - N_t & \text{II} & \mathcal{F}_t^N \\ N_{t+s} - N_t & \stackrel{Loi}{=} & N_s - N_0 \end{cases}$$

- iii) N_t est une v.a. $\sim \mathcal{P}(\lambda)$ ie $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

Preuve ($\Rightarrow$) Soit N un processus de Poisson.

- i) On a $N_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} 1_{\{\tau_k \leq 0\}} = 0$

- ii) Si $\mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = K, N_t = n) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = K) \cdot \mathbb{P}(N_t = n)$ alors
 $N_{t+s} - N_t \text{ II } N_t$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = K, N_t = n) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = K + n, N_t = n) \\
 &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{K+n} \delta_i \leq t + s < \sum_{i=1}^{K+n+1} \delta_i, \sum_{i=1}^n \delta_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\right) \\
 &= \mathbb{E}[f(\delta_1, \dots, \delta_{K+n+1})] \\
 &= \int_{(\mathbb{R}^+)^{K+n}} \lambda^{K+n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{K+n+1} x_i} f(x_1, \dots, x_{K+n+1}) dx_1 \cdots x_{K+n+1} \\
 &= \cdots \text{changement de variable } y_j = \sum_{i=1}^j x_i \\
 &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = K) \cdot \mathbb{P}(N_t = n)
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\text{Soit } n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t \text{ et } \tau_{n+1} > t) \\
&= \mathbb{P}(\tau_n \leq t) - \mathbb{P}(\tau_{n+1} \leq t) \\
&= \int_0^t e^{-\lambda x} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} dx - \int_0^t e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n dx \\
&= \dots \text{ (IPP)} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit N un processus vérifiant *i*) *ii*) et *iii*). On pose $\tau_n = \inf\{s \geq 0 \mid N_s = n\}$. Montrons que $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

$$- \tau_1 = \delta_1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 > t + s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0, N_t = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0, N_t = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0) \cdot \mathbb{P}(N_t = 0) \quad \text{indépendance des accroissements} \\
&= \mathbb{P}(N_s = 0) \cdot \mathbb{P}(N_t = 0) \quad \text{stationnarité} \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 > s) \cdot \mathbb{P}(\tau_1 > t)
\end{aligned}$$

$$\text{On pose } F(t) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) \Rightarrow F(t+s) = F(t) \cdot F(s)$$

On peut montrer que l'unique fonction solution est l'exponentielle, donc le premier (τ_1) suit bien une loi exponentielle.

$$- \text{Montrons que } \tau_{n+1} - \tau_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1} &= \inf\{s \geq \tau_n, N_s = n+1\} \\
&= \inf\{s \geq \tau_n, N_s - N_{\tau_n} = 1\} \quad \text{on pose } s = \tau_n + t \\
&= \inf\{t \geq 0, N_{\tau_n+t} - N_{\tau_n} = 1\} + \tau_n
\end{aligned}$$

Posons $\hat{N}_t = N_{\tau_n+t} - N_{\tau_n}$. $\hat{N}_t$ vérifie les propriétés *i*), *ii*) et *iii*) et est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_n}^N$ (conséquence de la propriété de Markov), donc

$$\tau_{n+1} = \underbrace{\inf\{t \geq 0, \hat{N}_t = 1\}}_{\text{de loi exponentielle}} + \tau_n$$

Remarque *Un processus de Poisson est Markovien (au sens fort).*

Propriété Soit N un processus de Poisson de paramètre λ . $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ est une martingale appelée Poisson compensé.

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_{t+s} - \lambda(t+s) | \mathcal{F}_t^N] &= \underbrace{\mathbb{E}[N_{t+s} - N_t | \mathcal{F}_t^N]}_{\text{II } \mathcal{F}_t} + \underbrace{\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_t^N]}_{\mathcal{F}\text{-mes}} - \lambda(t+s) \\
&= N_t - \lambda t + \underbrace{\mathbb{E}[N_{t+s} - N_t] - \lambda s}_{\mathbb{E}[N_s] - \lambda s = 0 \text{ car } N_s \sim \mathcal{P}(\lambda_s)}
\end{aligned}$$

Définition 13 N est dit processus de Poisson in-homogène si :

- i) $N_0 = 0$
- ii) les accroissements sont indépendants
- iii) $N_t \sim \mathcal{P}\left(\int_0^t \lambda_s ds\right)$

(permet de modéliser des processus qui dépendent du temps : trafic routier, ...)

Définition 14 Un processus de Poisson est dit composé s'il existe $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. et indépendant des (δ_i) tel que : $N_t = \sum_{i=1}^{+\infty} Y_i 1_{\{\tau_i \leq t\}}$
(permet de modéliser une hauteur de marché aléatoire : coût d'un accident, ...)

1.5 Processus gaussiens

Une variable aléatoire est dite gaussienne, $X \sim N(m, \sigma^2)$, si elle admet comme fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$m = \mathbb{E}[X] \text{ et } \sigma^2 = \mathbb{E}(X - m)^2$$

$$\text{Transformé de Laplace : } \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Preuve $\mathbb{E}[e^{tx}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{tx - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$ puis changement de variable.

Rappel Théorème Central Limite (TCL)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = m$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - m) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Définition 15 $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien si $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i X_i$ est une gaussienne.

Remarque Un vecteur gaussien admet deux paramètres :

- Le vecteur espérance : $m = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix}$
- La matrice de covariance $C = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i \leq j \leq n}$. C est symétrique, positive ($Y^*CY \geq 0$) (ie C est diagonalisable à valeurs propres ou nulles)

Propriété Soit X un vecteur gaussien.

- i) Si C est inversible (définie positive), alors le vecteur X admet une densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(C) \times 2\pi}^n} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - m)^t C^{-1} (x - m) \right]$$

- ii) $X_i \perp X_j$ ssi $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ (ici la réciproque est vraie car X_i coordonnées d'un vecteur gaussien)

- iii) Il existe $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que $(X_i - \alpha_{ij} \cdot X_j) \perp X_i$ (Il existe $A \in M_n$ tel que AX soit à coordonnées indépendantes)
- iv) Si $Y \perp Z$, Y et Z gaussiennes, alors (Y, Z) est un vecteur gaussien. La réciproque est fausse.

Preuve

- ii) $(\Rightarrow)$ vrai pour toutes les v.a. ! $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

$(\Leftarrow)$ Soit $\hat{X} = (X_i, X_j)$ est un vecteur gaussien. $\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & \sigma_j^2 \end{pmatrix}$.

1er cas : $\sigma_i^2 = 0$ (ou $\sigma_j^2 = 0$)

X_i est déterministe : $X_i(\omega) = m_i \quad \forall \omega$ donc $X_i \perp X_j$.

2ème cas : $\sigma_i^2 \cdot \sigma_j^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{La densité de } \hat{X} : f(x_i, x_j) &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j \cdot 2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \frac{(x_j - m)^2}{\sigma_j^2} \right) \\ &= g(x_i) \cdot h(x_j) \end{aligned}$$

donc $X_i \perp X_j$.

- iii) On remarque $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (X_i - \alpha X_j, X_j)$ est gaussien. On cherche α tel que $Cov(X_i - \alpha X_j, X_j) = 0$ c'est à dire $Cov(X_i, X_j) - \alpha Var(X_j) = 0$.

Si X_j est déterministe, α quelconque, sinon $\alpha = \frac{Cov(X_i, X_j)}{Var(X_j)}$.

- iv) Soit X, Y indépendants gaussiennes. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrons que $aX + bY \sim \mathcal{N}$.

Sa transformée de Laplace est :

$$\begin{aligned} G(t) &= \mathbb{E} \left[e^{t(aX+bY)} \right] \\ &= \mathbb{E}[e^{taX}] \cdot \mathbb{E}[e^{tbY}] \\ &= \exp \left(t \cdot am_X + \frac{1}{2} t^2 \times a^2 \cdot \sigma_X^2 + t \cdot bm_Y + \frac{1}{2} t^2 \times b^2 \cdot \sigma_Y^2 \right) \\ &= \exp \left(t(am_X + bm_Y) + \frac{1}{2} t^2 (a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2) \right) \end{aligned}$$

donc $aX + bY \sim \mathcal{N}((am_X + bm_Y), a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2)$

Contre-exemple : L'indépendance est nécessaire. Soit X une v.a. gaussienne. Soit ε v.a. de Bernoulli dans $\{-1, 1\}$ indépendante de X , de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $Y = \varepsilon X$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tY}] &= \mathbb{E}[e^{t\varepsilon X}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tX} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=1\}}] + \mathbb{E}[e^{-tX} \mathbf{1}_{\{\varepsilon=-1\}}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[e^{tX}] + \mathbb{E}[e^{-tX}]] \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{mt + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} + e^{-mt + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Posons $Z = X + Y$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tZ}] &= \mathbb{E}[e^{t(1+\varepsilon)X}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[e^{2tX}] + 1) \Rightarrow Z \not\sim \mathcal{N} \end{aligned}$$

Propriété Soit (X, Y) un vecteur gaussien, la loi de X conditionnellement à Y est une gaussienne d'espérance conditionnelle linéaire en Y et de variance conditionnelle constante. ($\mathbb{E}[X|Y] = aY + b$).

Définition 16 X est un processus gaussien si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_1 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}^+$ le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est gaussien.

1.6 Mouvement brownien

1828 : R. Brownien (un botaniste) observe le mouvement de particules de pollen dans l'eau.

1877 : Delseaux les explique par des chocs entre pollen et molécules d'eau.

1900 : L. Bachelier dans sa thèse *Théorie de la spéculation*, modélise les cours d'actifs par ce type de mouvements. Il en montre la markovianité.

1905 : Einstein donne une définition "rigoureuse" du mouvement :
On note X_t la position de la particule de pollen à l'instant t .

i) $t \rightarrow X_t$ est continue

ii) accroissements indépendants

iii) accroissements stationnaires

Calcul de sa probabilité de transition

$$q(s, x, y) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in [y, y + dy] | X_t = x)$$

en reliant à l'équation de la chaleur la fonction :

$$f(s, x) = \mathbb{E}[g(X_{t+s}) | X_t = x]$$

$$f \text{ est solution de } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(0, x) &= g(x) \end{cases}$$

Lien entre probabilité et les EDP.

1923 : N. Wiener donne la définition du Brownien, la propriété et l'existence.

1942 : K. Itô définition de l'intégrale, calcul d'Itô.

1973 : Black & Scholes

2006 : Wendelin Werner : médaille Fields, a travaillé sur le mouvement brownien dans un plan.

1.6.1 Définition

Définition 17 Un processus B est un mouvement brownien généralisé s'il vérifie les conditions suivantes :

1. B est un processus continu

2. B est à accroissements indépendants : $\forall t, s \quad (B_{t+s} - B_t) \perp \mathcal{F}_t^B$

3. B est à accroissements stationnaires : $B_{t+s} - B_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_s - B_0$

Théorème 1.6.1 Si B est un mouvement brownien généralisé, $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$

Preuve

$$\begin{aligned}
B_t - B_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \quad \text{où } t_k = \frac{kt}{n} \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \quad X_k \text{ i.i.d. de loi } B_{\frac{1}{n}} - B_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} X_k^{(n)} \quad X_k \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} B_{\frac{1}{n}} - B_0 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}(B_1 - B_0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} Y_k \quad \text{où } Y_k \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_1 - B_0
\end{aligned}$$

1ère étape : Montrons que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \mathbb{E}[B_t] = t\mathbb{E}[B_1]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}[B_{nt} - B_0] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^n B_{kt} - B_{(k-1)t}] = n\mathbb{E}[B_t - B_0]$.

On a donc $\mathbb{E}[B_{nt}] = n\mathbb{E}[B_t]$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_{pt}] = \mathbb{E}[B_{q \times \frac{p}{q}t}] = q\mathbb{E}[B_{\frac{p}{q}t}]$.

$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \mathbb{E}[B_{rt}] = r\mathbb{E}[B_t]$.

Soit $s \in \mathbb{R}^+$, il existe $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Q}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = s$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_s] &= \mathbb{E}[B_{r_n}] + \mathbb{E}[B_s - B_{r_n}] \\
&= \underbrace{r_n \mathbb{E}[B_1]}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s\mathbb{E}[B_1]} + \underbrace{\mathbb{E}[B_s - B_{r_n}]}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}
\end{aligned}$$

2ème étape : $\text{Var}(B_t - B_0) = \sigma^2 t$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } n \in \mathbb{N} \quad \text{Var}(B_{nt} - B_0) &= \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{(k+1)t} - B_{kt}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}(B_{(k+1)t} - B_{kt}) \quad \text{car accroissements indépendants} \\
&= n\text{Var}(B_t - B_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad p\text{Var}(B_t - B_0) &= \text{Var}(B_{pt} - B_0) \\
&= \text{Var}(B_{q \times \frac{p}{q}t} - B_0) \\
&= q\text{Var}(B_{\frac{p}{q}t} - B_0)
\end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et soit $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \rightarrow t, r \leq t$, alors :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(B_t - B_0) &= \text{Var}(B_t - B_{r_n} + B_{r_n} - B_0) \\
&= \text{Var}(B_t - B_{r_n}) + r_n \text{Var}(B_1 - B_0) \\
&\geq \sigma^2 t \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } r_n \geq t, \quad \text{Var}(B_t - B_0) &\leq \text{Var}(B_{r_n} - B_0) \\
&\leq r_n \sigma^2
\end{aligned}$$

A-t-on $t \mapsto \text{Var}(B_t - B_0)$ est croissante ?

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } k > 0 \quad \text{Var}(B_{t+k} - B_0) &= \mathbb{E}[B_{t+k} - B_0 - (m(t+k) - \mathbb{E}[B_0])]^2 \\
 &= \text{Var}(B_{t+k} - B_t + B_t - B_0) \\
 &= \text{Var}(B_{t+k} - B_t) + \text{Var}(B_t - B_0) \\
 &\geq \text{Var}(B_t - B_0)
 \end{aligned}$$

3ème étape : $B_t \sim \mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$ (Transformée de Laplace)

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \mathbb{E}\left[e^{x(B_t - B_0)}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(x \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)\right] \quad \text{où } t_k = \frac{kt}{n} \\
 &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\exp\left(x(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right)\right] \quad \text{accroissements indépendants} \\
 &= \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(x(B_{\frac{t}{n}} - B_0)\right)\right]\right)^n \\
 &= \mathbb{E}\left[1 + x(B_{\frac{t}{n}} - B_0) + \frac{x^2}{2}(B_{\frac{t}{n}} - B_0)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \\
 &= \left(1 + xm\frac{t}{n} + \frac{x^2\sigma^2}{2}\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
 &= \exp\left[n \ln\left(1 + \left(xm + \frac{x^2\sigma^2}{2}\right)\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\
 &= \exp\left[xmt + \frac{x^2\sigma^2 t}{2} + o(1)\right]
 \end{aligned}$$

On reconnaît la transformée de Laplace de $\mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$

Définition 18 B est un mouvement brownien standard si c'est un mouvement généralisé tel que :

$$B_0 = 0 \text{ p.s. }, \quad m = \mathbb{E}[B_1] = 0, \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \text{Var}(B_1) = 1$$

(gaussienne centrée réduite)

Autrement dit :

B est un brownien standard si :

- i) $B_0 = 0$ p.s. et $t \mapsto B_t(\omega)$ est ps-continue.
- ii) B est à accroissements indépendants.
- iii) B est à accroissements stationnaires tel que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

Remarque Si B est un brownien standard, alors $W_t = W_0 + mt + \sigma B_t$ est un brownien généralisé et mt est appelé dérive (drift).

Problème :

$$\begin{aligned}
 \text{Calculer} \quad & \mathbb{E}[f(B_T)] \\
 & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{t_i}\right)\right] \\
 & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{T} \int_0^T B_u du\right)\right]
 \end{aligned}$$

Simulation d'un mouvement brownien $\Rightarrow$ Monte Carlo.

Rappel

$$\begin{aligned} B_t &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \\ &= \sum X_k \text{ où } X_k \text{ i.i.d., de loi } \mathcal{N}\left(0, \frac{t}{n}\right) \end{aligned}$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli :
 $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ marche aléatoire. Par le TCL, $\frac{1}{n} S_n \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) = B_1$. On pose $U_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k$. On remarque que $(U_{\frac{k}{n}})_{k \in [0, n]}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.
 $U_{\frac{(k+1)}{n}} - U_{\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}$ indépendant de $\mathcal{F}_k$ et de loi $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$

$$U_n(t) = \frac{U_{K(t)}}{n} + n \left(t - \frac{K(t)}{n} \right) \left(\frac{U_{K(t)+1}}{n} - \frac{U_{K(t)}}{n} \right) \quad \text{où } K(t) = \lfloor nt \rfloor$$

On peut montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_p \in [0, 1], \quad (U_n(t_1), \dots, U_n(t_p)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, \dots, B_{t_p})$$

Exercice $U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} B_t$ (Calculer la transformée de Laplace de $U_n(t)$ et faire tendre n vers $+\infty$)

Remarque (*Wiener 1923*)

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} g_n$$

où g_n i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.6.2 Mouvement brownien et processus gaussiens

Caractérisation Un processus B est brownien si et seulement si :

$$\begin{cases} (i) & B_0 = 0 \\ (ii) & B \text{ est un processus gaussien} \\ (iii) & B \text{ est centré, } \forall t, s, \quad \text{Cov}(B_t, B_s) = t \wedge s \end{cases}$$

Preuve ($\Rightarrow$) Soit B un mouvement brownien.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n \in [0, +\infty]$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On veut montrer que $\sum_{i=1}^n a_i B_{t_i}$ est une gaussienne.

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i B_{t_j} - B_{t_{j-1}} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_i \right) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

est une gaussienne car les $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ sont des gaussiennes indépendantes.

Montrons (iii)

$\mathbb{E}[B_t] = 0$ (d'après ce qui précède). Soit $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t, B_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s]\mathbb{E}[B_s] + s \\ &= s \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit B un processus gaussien centré de covariance $\text{Cov}(B_t, B_s) = t \wedge s$ et tel que $B_0 = 0$ p.s.

Stationnarité : Soit $s \leq t$. $B_t - B_s$ est une gaussienne centrée de variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t - B_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 \\ &= \text{Var}(B_t) + \text{Var}(B_s) - 2\text{Cov}(B_t, B_s) \\ &= t + s - 2s \\ &= t - s \end{aligned}$$

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s} - B_0$$

Indépendance : Soit $u \leq s \leq t$. Montrons que $B_t - B_s$ est indépendant de B_u .

$(B_u, B_t - B_s)$ est un vecteur gaussien,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_u, B_t - B_s) &= \text{Cov}(B_u, B_t) - \text{Cov}(B_u, B_s) \\ &= u - u \quad (\text{car } u \leq s \text{ et } u \leq t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $B_t - B_s \perp \sigma(B_u; u \leq s)$

Continuité : $\text{Var}(B_t - B_s) = t - s \Rightarrow \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 \leq t - s$

Le théorème de Kolmogorov implique que B est continu.

Corollaire Soit B un brownien.

1. $\tilde{B}_t = -B_t$ est un brownien
2. $\bar{B}_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ est un brownien (scaling)
3. $\hat{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un brownien

Preuve

1. - $\tilde{B}_0 = -B_0 = 0$ p.s. car B est un brownien.
 - Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i \tilde{B}_t$ est une gaussienne :
 $\sum_{i=1}^n a_i \tilde{B}_t = -\sum_{i=1}^n a_i B_t$ est une gaussienne car B est un brownien.
 - $\mathbb{E}[\tilde{B}_t] = -\mathbb{E}[B_t] = 0$ car B est centré.
 - Soit $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) &= \text{Cov}(-B_t, -B_s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_s) \\ &= s \wedge t \\ &= s \end{aligned}$$

2. – $\bar{B}_0 = cB_0 = 0$ p.s. car B est un brownien.
- Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i \bar{B}_t$ est une gaussienne :
 $\sum_{i=1}^n a_i \bar{B}_t = c \sum_{i=1}^n a_i B_{\frac{t}{c^2}}$ est une gaussienne car B est un brownien.
- $\mathbb{E}[\bar{B}_t] = c\mathbb{E}[B_{\frac{t}{c^2}}] = 0$ car B est centré.
- Soit $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\bar{B}_s, \bar{B}_t) &= c^2 \text{Cov}(B_{\frac{s}{c^2}}, B_{\frac{t}{c^2}}) \\
&= c^2 \left(\frac{s}{c^2} \wedge \frac{t}{c^2} \right) \\
&= c^2 \cdot \frac{s}{c^2} \\
&= s
\end{aligned}$$

3. – On pose que $\hat{B}_0 = 0$ ps
- Montrons que $\sum_{i=1}^n a_i \hat{B}_t$ est une gaussienne :
 $\sum_{i=1}^n a_i \hat{B}_t = \sum_{i=1}^n a_i t_i B_{\frac{1}{t}}$ est une gaussienne car B est un brownien.
- $\mathbb{E}[\hat{B}_t] = \mathbb{E}[t B_{\frac{1}{t}}] = 0$ car B est centré.
- Soit $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{B}_s, \hat{B}_t) &= \text{Cov}(s B_{\frac{1}{s}}, t B_{\frac{1}{t}}) \\
&= st \text{Cov}(B_{\frac{1}{s}}, B_{\frac{1}{t}}) \\
&= st \left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t} \right) \\
&= st \times \frac{1}{t} \\
&= s
\end{aligned}$$

1.6.3 Mouvement brownien et martingales

Propriété Soit B un brownien

- i) B est une martingale
- ii) $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \left(\exp \left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right) \right)_{t \geq 0}$ est une martingale

Preuve

1. Intégrabilité : $\mathbb{E}[|B|] < +\infty$ car B suit une loi gaussienne
- Propriété martingale : Soit $s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s \\
&= \mathbb{E}[B_{t-s} - B_0] + B_s \\
&= B_s
\end{aligned}$$

2. Intégrabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|B_t^2 - t|] &\leq \mathbb{E}[|B_t^2|] + \mathbb{E}[|t|] \\
&\leq \text{Var}(B_t) + t \\
&\leq 2t \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Propriété martingale : Soit $s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 | \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] - t \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s] - t \\
&= t - s + B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - s
\end{aligned}$$

3. Propriété martingale : Soit $s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda(B_t - B_s + B_s) - \frac{\lambda^2}{2}t \right) | \mathcal{F}_s \right] &= \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2}t \right) \cdot \mathbb{E} [\exp(\lambda(B_t - B_s + B_s)) | \mathcal{F}_s] \\
&= \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2}t \right) \cdot \mathbb{E} [\exp(\lambda B_s) \exp(\lambda(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s] \\
&= \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2}t \right) \cdot \exp(\lambda B_s) \mathbb{E} [\exp(\lambda(B_t - B_s))] \\
&= \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2}t \right) \cdot \exp(\lambda B_s) \exp \left(\lambda^2 \frac{t-s}{2} \right) \\
&= \exp \left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2} \right)
\end{aligned}$$

Caractérisation : (P. Levy)

Soit X un processus continu, issu de 0 ($X_0 = 0$ presque sûr). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un mouvement brownien
2. X et $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$ sont des martingales
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \left(\exp \left(\lambda X_t - \frac{\lambda^2 t}{2} \right) \right)_{t \geq 0}$ est une martingale

Preuve

- (2) $\Rightarrow$ (1) admis
- (1) $\Rightarrow$ (2) déjà vu
- (1) $\Rightarrow$ (3) déjà vu
- (3) $\Rightarrow$ (1). On suppose (3).
Montrons que $X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(\lambda(X_t - X_s)) | \mathcal{F}_s] &= e^{-\lambda X_s} \mathbb{E}[e^{\lambda X_t} | \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-\lambda X_s + \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} | \mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{-\lambda X_s + \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot e^{\lambda X_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} \\
&= \underbrace{e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}}_{\Pi \mathcal{F}_s}
\end{aligned}$$

Donc $X_t - X_s \Pi \mathcal{F}_s$ et $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

1.6.4 Propriété de Markov

Théorème 1.6.2 *Soit B un brownien. Alors B vérifie la propriété de Markov forte :*

$\forall \tau$ temps d'arrêt, $\forall f$ bornée, $\mathbb{E}[f(B_{t+\tau}) | \mathcal{F}_\tau^B] = \mathbb{E}[f(B_{t+\tau}) | B_\tau]$

En particulier, $W_t = B_{t+\tau} - B_\tau$ est un brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$

Preuve Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s] \\
&= \Psi(t, B_s) \\
&= \mathbb{E}[f(B_{t+s}) | B_s]
\end{aligned}$$

$$\text{où } \Psi(t, x) = \mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s + x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y + x) e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

1.6.5 Temps d'atteinte

Définition 19 *Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $T_a = \inf\{s \geq 0, B_s = a\}$*

T_a est appelé le temps d'atteinte de a par B . (Il existe toujours car le processus est continu).

Propriété : Loi de T_a

- i) T_a est un temps d'arrêt
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{E}[e^{-xT_a}] = e^{-|a|\sqrt{2x}}$ et $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1$ et $\mathbb{E}[T_a] = +\infty$
- iii) La densité de T_a est : $f(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$

Preuve i) Soit $a \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\{T_a \leq t\} &= \left\{ \sup_{s \leq t} B_s \geq a \right\} \\
&= \{\forall \epsilon > 0, \exists s \in [0, t], \quad B_s \geq a - \epsilon\} \\
&= \{\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^{+*}, \exists s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}, \quad B_s > a - \epsilon\} \\
&= \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^{+*}} \bigcup_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \underbrace{\{B_s > a - \epsilon\}}_{\mathcal{F}_{t-\epsilon s}}
\end{aligned}$$

ii) Calcul de la transformée de Laplace

On sait que : $\mathcal{E}_t = \exp(yB_t - \frac{y^2}{2}t)$ est une martingale.

$$\left(\mathbb{E}[\exp(yB_{T_a} - \frac{y^2}{2}T_a)] \stackrel{?}{=} \exp(yB_0 - \frac{y^2}{2} \times 0) = 1 \right)$$

Soit $\tau = T_a \wedge t$ (temps d'arrêt).

D'après le théorème d'arrêt de Doob : $\mathbb{E}[e^{yB_\tau - \frac{y^2}{2}\tau}] = 1$

$$1 = \mathbb{E} \left[e^{yB_\tau - \frac{y^2}{2}\tau} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} + \mathcal{E}_\tau \mathbf{1}_{\{T_a = +\infty\}} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[e^{yB_\tau - \frac{y^2}{2}\tau} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} \right]$$

Par convergence dominée $\left(e^{yB_\tau - \frac{y^2}{2}\tau} \leq e^{ya} \right)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}_\tau \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}}] = \mathbb{E} \left[e^{yB_{T_a} - \frac{y^2}{2}T_a} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} \right] = e^{ya} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{y^2}{2}T_a} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} \right]$$

$$1 = e^{ya} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{y^2}{2}T_a} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} \right] + \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}_\tau \mathbf{1}_{\{T_a = +\infty\}}]$$

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}_\tau \mathbf{1}_{\{T_a = +\infty\}}] \leq e^{ya} \mathbb{E} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-\frac{y^2}{2}\tau} \mathbf{1}_{\{T_a = +\infty\}}) \right] \leq 0$$

On a donc montré que : $\forall y > 0, 1 = e^{ya} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{y^2}{2}T_a} \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} \right]$

Pour $y \rightarrow 0, 1 = \mathbb{P}(T_a < +\infty)$, donc : $1 = e^{ya} \mathbb{E}[\exp(-\frac{y^2}{2}T_a)]$

On pose : $x = \frac{y^2}{2}, \mathbb{E}[e^{-xT_a}] = e^{-a\sqrt{2x}}$

iii) Rq : Si X v.a. à densité $f, F(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} f(x) dx$

Transformée de Laplace inverse :

$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{(\alpha+i\beta)x} F(\alpha+i\beta) d\beta$ avec α tel que l'intégrale existe.

Définition 20 Soit X défini par :

$$X_t = \begin{cases} B_t & t \leq T_a \\ 2a - B_t & \text{si } t > T_a \end{cases}$$

X est brownien réfléchi en a .

Propriété X est un mouvement brownien

Preuve X est continu car B l'est.

Montrons que X et $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$ sont des martingales. Soit $s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} \\ &= \mathbb{E}[(2a - B_t) | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + \mathbb{E}[X_t \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} + X_t \mathbf{1}_{\{T_a > t\}} | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} \\ &= (2a - B_s) \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + \mathbb{E}[(2a - B_t) \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} + B_t \mathbf{1}_{\{T_a > t\}} | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} \\ &= (2a - B_s) \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + \mathbb{E}[\mathbb{E}[(2a - B_t) | \mathcal{F}_{T_a}] \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} + \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_{T_a}] \mathbf{1}_{\{T_a > t\}} | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}}] \\ &= (2a - B_s) \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + \mathbb{E}[(2a - B_{T_a}) \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} + B_t \mathbf{1}_{\{T_a > t\}} | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} \\ &= (2a - B_s) \mathbf{1}_{\{T_a \leq s\}} + B_s \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} + \mathbb{E}[a \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} - B_t \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_{\{T_a > s\}} \\ &= X_s - \mathbf{1}_{\{T_a \geq s\}} \mathbb{E}[(B_t - a) \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} | \mathcal{F}_s] \\ &= X_s - \mathbf{1}_{\{T_a \geq s\}} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[B_t - B_{T_a} | \mathcal{F}_{T_a}] \mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} | \mathcal{F}_s]}_{=0 \text{ car } B_t - B_{T_a} \text{ II } \mathcal{F}_{T_a}} \end{aligned}$$

Corollaire i) Loi de (S_t, B_t) où $S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$

ii) Loi de T_a

Preuve Fonction de répartition du couple (S_t, B_t)

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \mathbb{P}(S_t > b, B_t < a) \\ &= \int_b^{+\infty} \int_{-\infty}^a f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Remarque : $f(b, a) = -\delta_{b,a}^2 F(a, b)$

$F(a, b) = \mathbb{P}(T_b < t, B_t < a)$. On remarque que $T_b^B = T_b^{X^b}$ (où X^b est le brownien réfléchi en b)

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \mathbb{P}(T_b < t, sb - B_t > 2b - a) \\ &= \mathbb{P}(-T_b^B < t, X_t^b > 2b - a) \\ &= \mathbb{P}(T_b^X < t, X_t > 2b - a) \quad (\text{car } T_b^B = T_b^X) \\ &= \mathbb{P}(T_b^X < t, B_t > 2b - a) \\ &= \mathbb{P}(B_t > 2b - a) \\ &= \int_{2b-a}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx \end{aligned}$$

Densité de (S_t, B_t)

$$\begin{aligned} f(b, a) &= -\mathbf{1}_{\{b>0\}} \mathbf{1}_{\{a<b\}} \delta_{a,b}^2 \int_{-\infty}^{a-2b} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx \\ &= -\mathbf{1}_{\{b>0\}} \mathbf{1}_{\{a<b\}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{d - e^{\frac{(a-2b)^2}{2t}}}{db} \\ &= -\mathbf{1}_{\{b>0\}} \mathbf{1}_{\{a<b\}} \times \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(a-2b)^2}{2t}\right] \end{aligned}$$

Loi de S_t

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t > b) &= \mathbb{P}(S_t > b, B_t \in \mathbb{R}) \\ &= \int_b^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Densité de S_t

$$g(b) = \int_{\mathbb{R}} f(b, y) dy$$

Loi de T_b

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_b \leq t) &= \mathbb{P}(S_t > b) \\ h_{T_b}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{P}(S_t > b)) \\ &= \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \end{aligned}$$

1.6.6 Propriété des trajectoires

But : A ω fixé, étude de $t \rightarrow B_t(\omega)$

Remarque : $\int g(t)df(t) = \int g(t)f'(t)dt$

Propriété $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \leq s} \frac{B_s}{\sqrt{s}} \right) = +\infty$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$$

Preuve On pose $R = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Soit $s \in \mathbb{R}^+$, $R = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t}}$ indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$

On a R indépendant de $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_u, u \geq 0)$ et R mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\infty$ c'est à dire $R \parallel R$ donc R constante dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Par l'absurde, supposons R fini,

$$0 = \mathbb{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > R + 1\right) = \mathbb{P}(B_1 > R + 1) > 0 \text{ donc } R = +\infty$$

Propriété Récurrence

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\exists (t_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}, \text{ strictement croissante, } B_{t_n} = x) = 1$

Preuve $\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty, \liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty$ puis TVI (continuité de B)

Propriété B n'est dérivable nulle part à droite et à gauche.

Preuve $+\infty = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t - B_0}{\sqrt{t}} \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t - B_0}{t}$

B n'est pas dérivable à droite en 0.

B n'est pas dérivable à droite en $s \in \mathbb{R}^{+*}$ car $W_t = B_{s+t} - B_s$

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{B_{s+t} - B_s}{t} \right) \geq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_t}{t} = +\infty$$

Propriété Presque sûrement, il n'existe pas d'intervalle I sur lequel B soit monotone.

Théorème 1.6.3 Variation quadratique

Soit $n \in \mathbb{N}$, $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$

On a $\mathbb{E}(Z_t^n - t)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Z_t^n = t$

(C'est la seule régularité qui existe sur le mouvement brownien)

Preuve Convergence L^2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Z_t^n - t)^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{2^n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - t \right)^2 \\
 &= \text{Var}(Z_t^n) \text{ car } \mathbb{E}[Z_t^n] = t \\
 &= \sum_{j=1}^{2^n} \text{Var}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2] \text{ car accroissements indépendants} \\
 &= 2^n \text{Var} \left((B_{\frac{t}{2^n}})^2 \right) \\
 &= 2^n \times \frac{2t^2}{2^{2n}} \\
 &= \frac{t^2}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

On a également montré que $\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (Z_t^n - t)^2 \right] = t^2 \sum (\frac{1}{2})^{n-1} < +\infty$ donc la série de termes $(Z_t^n - t)^2$ converge presque sûrement, donc $(Z_t^n - t)^2 \rightarrow 0$ presque sûrement.

Chapitre 2

Intégrales stochastiques

But : Intégrer par rapport à un processus stochastique
 Si (S_t) actif risqué, (V_t) richesse associée à un portefeuille.
 Autofinancement : $d\tilde{V}_t = \varphi_t d\tilde{S}_t \tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \varphi_s d\tilde{S}_s$

2.1 Intégrale de Wiener (Intégration de fonctions déterministes par un processus stochastique)

Remarque : *Intégrale de Riemann*

$$\int_0^t f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)$$

Première idée :

$$\int_0^t f(s)dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \left[B_{\frac{(k+1)t}{n}} - B_{\frac{kt}{n}}\right]$$

Si f est constante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{\frac{(k+1)t}{n}} - B_{\frac{kt}{n}}\right)$

Il faudrait que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |B_{\frac{(k+1)t}{n}} - B_{\frac{kt}{n}}|$ existe

$$\text{Or : } L = +\infty \text{ car } t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \leq L \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq 2^n} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|}_{=0}$$

Si L est fini, $t \leq 0$: absurde.

Remarque : On veut que $\int_0^t c dB_s = c(B_t - B_0)$

Seconde idée :

On va construire l'intégrale sur les fonctions en escalier :

$$\mathcal{E} = \{f, \exists 0 = t_0 < \dots < t_n = +\infty, (f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k 1_{[t_k, t_{k+1}[}(x)\}$$

$$\text{On a : } \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-2} f_k(t_{k+1} - t_k) \quad (f_n = 0)$$

Définition 21 : *Intégrale de fonctions en escalier.*

Soit $f \in \mathcal{E}$. On pose : $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$

$I(f)$ est l'intégrale de Wiener de f .

Propriété

$I(f)$ est une gaussienne centrée car B est un vecteur gaussien centré :

$$\begin{aligned} \text{Var}(I(f)) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k^2 (t_{k+1} - t_k) \\ &= \int_0^{+\infty} f(s)^2 ds \end{aligned}$$

Propriété d'isométrie :

$\| I(f) \|_{L^2(\Omega)} = \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ où $L^2(\Omega) = \{X \text{ v.a.r.}, \mathbb{E}[X^2] < +\infty\}$ et $L^2(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} f^2 < +\infty\}$ $\| X \|_{L^2(\Omega)} = (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}}$ et $\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Généralisation : Soient $f, g \in \mathcal{E}$ intégrables

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds$$

Définition 22 : *Extension à $L^2(\mathbb{R}^+)$*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. On pose : $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$

où f_n est une suite de fonctions en escalier telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| f_n - f \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = 0$

Justification de la définition :

1. Densité de $\mathcal{E}$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ pour $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$

2. Soit $(f_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}, \| f - f_n \|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \rightarrow 0$

On pose : $I_n = I(f_n)$

I_n converge dans $L^2(\Omega)$ car elle est de Cauchy et $L^2(\Omega)$ est complet.

$\| I_n - I_p \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| I(f_n - f_p) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| f_n - f_p \|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2$ par isométrie.

Or (f_n) est convergente donc de Cauchy $\Rightarrow I_n$ de Cauchy

3. Soient $(g_n), (f_n) \in \mathcal{E} \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ alors $\lim I(g_n) = \lim I(f_n)$
(admis : Revuj-Yor)

Définition 23 finale :

Soit $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+)$ $\left(\forall T \in \mathbb{R}^+, \int_0^T f^2(s)ds < +\infty \right)$.

L 'intégrale de Wiener de f entre $[0, t]$ est : $\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(s)1_{\{s \leq t\}}}_{\in L^2(\mathbb{R}^+)} dB_s$

Caractérisation :

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $Z \in L_{loc}^2(\Omega)$

$$Z = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s \text{ ssi } \mathbb{E}[ZB_t] = \int_0^t f(s)ds \quad \forall t > 0$$

Preuve

($\Rightarrow$) Soit $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[B_t \int_0^{+\infty} f(s) dB_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} f(s) dB_s \int_0^{+\infty} 1_{\{s \leq t\}} dB_s \right] \\ &= \int_0^{+\infty} f(s) 1_{\{s \leq t\}} ds \\ &= \int_0^t f(s) ds \end{aligned}$$

Propriété : Soient $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$

i) Isométrie : $\mathbb{E}[\int_0^t g(s) dB_s \int_0^u f(s) dB_s] = \int_0^{t \wedge u} g(s) f(s) ds$

ii) On pose : $(X_t = \int_0^t f(s) dB_s)_{t \geq 0}$

(X_t) est un processus gaussien, centré, $Cov(X_t, X_s) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u) du$, à accroissements indépendants

iii) X est une martingale, $(X_t^2 - \int_0^t f^2(s) ds)_{t \geq 0}$ aussi.

iv) X est markovien (car accroissements indépendants)

Preuve i) On pose $\bar{f}(s) = f(s) 1_{\{s \leq t\}} \in L^2(\mathbb{R}^+)$

Soit $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\|\bar{f}_n - \bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^t f(s) dB_s \right)^2 &= Var(I(\bar{f})) \\ &= Var(\lim_{n \rightarrow \infty} I(\bar{f}_n)) \\ &\stackrel{\text{convergence dominée}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} Var(I(\bar{f}_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &= \|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &= \|f\|_{L^2([0, t])}^2 \end{aligned}$$

Puis utiliser $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$

ii) Soient $t_1 < \dots < t_n$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $Y = \sum a_i X_{t_i}$

On pose : $X_t^{(k)} = \int_0^t f_k(s) dB_s$ (f_k) $\in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ avec $f_k \rightarrow f$

Le processus $X^{(k)}$ est gaussien

$Y^{(k)} = \sum a_i X_{t_i}^{(k)} = \sum a_i \sum f_k^{(j)}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ est une gaussienne, donc

$Y = \lim_{k \rightarrow +\infty} Y^{(k)}$ dans $L^2(\Omega)$ est aussi une gaussienne.

Montrons que (X_t) est à accroissements indépendants. Conséquence de la valeur de la covariance ($u \leq t$) :

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+s} - X_t, X_u) &= Cov(X_{t+s}, X_u) - Cov(X_t, X_u) \\ &= \int_0^u f^2(v) dv - \int_0^u f^2(v) dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

- iii) Exercice : $X^{(k)}$ est une martingale, puis passage à la limite, X est une martingale

Propriété : Intégration par parties

$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s f'(s)ds$. Vraie pour $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+) \cap C^1$

Preuve

1ère idée : $\mathbb{E}(X - Y)^2 = 0 \Leftrightarrow X = Y$ p.s.

2ème idée : Utiliser la caractérisation.

Remarque Modélisation du cours d'un actif.

Bachelier 1900 : $S_T = \underbrace{\mu t + \sigma B_t}_{\text{brownien généralisé}} + S_0$

Problème de cette modélisation : $\mathbb{P}(S_t \leq 0) > 0$

Black, Scholes et Merton dans les années 1970 ont fait trois hypothèses :

1. S est continu.
2. $\frac{S_{t+s} - S_t}{S_t} \Pi \mathcal{F}_t$ (Rendement indépendant du passé)
3. $\frac{S_{t+s} - S_t}{S_t}$ stationnaire $\left(\stackrel{\text{Loi}}{=} \frac{S_s - S_0}{S_0} \right)$

Si on pose $X_t = \ln(S_t)$ (si $S_t > 0$), on peut voir que X est un brownien général.

2.1.1 Brownien géométrique

Définition 24 S est un brownien géométrique si et seulement si $\exists b \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+, S_t = S_0 \exp \left[(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \right]$

Propriété

i) $(e^{-bt} S_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

ii) Pour $s < t$ $S_t = S_s \exp \left[(b - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(B_t - B_s) \right] = f(S_s, \underbrace{B_t - B_s}_{\Pi S_s})$

S est markovien $\mathbb{E}[g(S_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[g \cdot f(S_s, B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = \Psi(S_s)$

Où $\Psi(x) = \mathbb{E}[g \circ f(x, B_t - B_s)] = \dots = \mathbb{E}[g(S_t)|S_s]$

Propriété $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{bt}$

$Var(S_t) = \mathbb{E} \left[S_0^2 e^{2bt} (e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t} - 1)^2 \right] = \dots = S_0^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1)$

Plus généralement,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(S_t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[f \left(S_s \exp \left((b - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(B_t - B_s) \right) \right) | \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[f \left(x \exp(b - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma(B_t - B_s) \right) \right]_{|x=S_s} \\
 &= \mathbb{E} \left[f \left(x \exp(b - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}G \right) \right]_{|x=S_s} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f \left(S_s e^{(b - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}y} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy
 \end{aligned}$$

Conséquence i) Ratio de Sharpe de l'actif :

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{\mathbb{E}[S_t] - S_0}{\sqrt{\text{Var}(S_t)}} \\ &= \frac{e^{bt} - 1}{e^{bt}(e^{\sigma^2 t} - 1)} \end{aligned}$$

ii) Formule de Black-Scholes

$$f(x) = (x - K)^+$$

Remarque

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + (b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \\ &= \ln(S_0) + \int_0^t (b - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s \end{aligned}$$

2.1.2 Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Théorème 2.1.1 *L'équation de Langevin : $dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t$. Elle admet une unique solution : $V_t = V_0 e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dB_u$. V_0 est une gaussienne indépendante du brownien.*

Preuve Soit $X_t = V_0 e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dB_u$. Par IPP :

$$X_t = V_0 e^{-at} + \sigma B_t - a \sigma \int_0^t B_u e^{-a(t-u)} du$$

$$\int_0^t X_s ds = -\frac{V_0}{a}(e^{-at} - 1) + \sigma \int_0^t B_s ds - a \sigma \int_0^t \int_0^s B_u e^{-a(s-u)} du ds$$

$$\begin{aligned} a \int_0^t X_s ds &= V_0 - V_0 e^{-at} + \sigma a \int_0^t B_s ds - a^2 \sigma \int_0^t \int_u^t B_u e^{-a(s-u)} ds du \\ &= V_0 - V_0 e^{-at} + \sigma a \int_0^t B_s ds - a \sigma \int_0^t B_u \times (-\frac{1}{a}(e^{-a(t-u)} - 1)) du \\ &= V_0 - V_0 e^{-at} + \sigma a \int_0^t B_u e^{-a(t-u)} du \\ &= V_0 - (X_t - \sigma B_t) \end{aligned}$$

$$X_t = V_0 - a \int_0^t X_s ds + \sigma B_t$$

$dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$ donc X est solution de l'équation de Langevin.

Soit V est une autre solution. On pose $Z = X - V$.

$$\text{Or } Z_t = -a \int_0^t Z_s ds \Leftrightarrow \begin{cases} dZ_t = -aZ_t ds \\ Z_0 = 0 \Rightarrow Z_t = 0 \end{cases}$$

Définition 25 V est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Si $V_t = V_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u$, on a $dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t$

Propriété i) $(e^{at} V_t)$ est une martingale si V_0 est constante.

$$\mathbb{E}[e^{at} V_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[V_0] + \sigma \int_0^s e^{au} dB_u = \mathbb{E}[V_0] - V_0 + e^{at} V_s$$

ii) (V_t) est un processus gaussien car $V_0 \perp B$ et $V_0 \sim N$ avec $\mathbb{E}[V_t] = e^{-at}\mathbb{E}[V_0]$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_t, V_s) &= \mathbb{E} \left[\left(e^{-at}(V_0 - \mathbb{E}[V_0]) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u \right) \left(e^{-as}(V_0 - \mathbb{E}[V_0]) + \sigma \int_0^s e^{-a(s-u)} dB_u \right) \right] \\ &= e^{-2at} \text{Var}(V_0) + \sigma^2 e^{-a(t+s)} \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{au} dB_u \int_0^s e^{au} dB_u \right] \\ &= e^{-2at} \text{Var}(V_0) + \sigma^2 e^{-a(t+s)} \int_0^{t \wedge s} e^{2au} du \end{aligned}$$

iii) V est markovien

On pose $\tilde{V}_t = e^{at}V_t$

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= ae^{at}V_t dt + e^{at}dV_t \\ &= ae^{at}V_t dt - ae^{at}V_t dt + e^{at}\sigma dB_t \\ &= e^{at}\sigma dB_t \end{aligned}$$

On intègre entre s et t : $\tilde{V}_t - \tilde{V}_s = \sigma \int_s^t e^{au} dB_u$

Conclusion : $V_t = e^{-a(t-s)}V_s + \underbrace{\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u}_{\perp V_s \text{ et centrée}}$

iv) $\mathbb{E}[V_t|V_s] = e^{-a(t-s)}V_s$

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_t|V_s) &= \mathbb{E}[(V_t - e^{-a(t-s)}V_s)^2|V_s] \\ &= \mathbb{E} \left[\sigma^2 \left(\int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 \int_s^t e^{-2a(t-u)} du \quad (\text{isométrie}) \end{aligned}$$

Propriété On pose $X_t = \int_0^t V_s ds$. La loi de X_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est une gaussienne telle que :

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s + \frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a} V_s$$

$$\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{a^2} \int_s^t \left(e^{-a(t-u)} + 1 \right)^2 du$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= X_s + \frac{1}{a} \mathbb{E}[(V_s - V_t) | \mathcal{F}_s] + \frac{\sigma}{a} \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] \\
&= X_s + \frac{1}{a} V_s \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) \\
\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E} \left[(X_t - \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s])^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(X_t - X_s - \frac{1}{a} V_s \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t V_u du \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] - \frac{2}{a} V_s \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) \mathbb{E}[(X_t - X_s) | \mathcal{F}_s] + \frac{1}{a^2} V_s^2 \left(1 - e^{-a(t-s)}\right)^2 \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t V_u du \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] - \frac{V_s^2}{a^2} \left(1 - e^{-a(t-s)}\right)^2
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t V_u du \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] &= \frac{1}{a^2} \mathbb{E} \left[(V_s - V_t + \sigma(B_t - B_s))^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \mathbb{E} \left[\left(V_s(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t (1 - e^{-a(t-u)}) dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{1}{a^2} V_s^2 \left(1 - e^{-a(t-s)}\right)^2 + \frac{2}{a^2} V_s \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) \\
&\quad \times \underbrace{\sigma \mathbb{E} \left[\int_s^t (1 - e^{-a(t-u)}) dB_u | \mathcal{F}_s \right]}_{=0 \text{ car } \Pi_{\mathcal{F}_s} \text{ et centré}} + \frac{\sigma^2}{a^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t (1 - e^{-a(t-u)}) dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{1}{a^2} V_s^2 \left(1 - e^{-a(t-s)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_s^t (1 - e^{-a(t-u)})^2 du
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{a^2} \int_s^t (1 - e^{-a(t-u)})^2 du$$

Donc la loi de X_t sachant $\mathcal{F}_s$ est "évidemment" une gaussienne car V est un processus gaussien.

Modèle de Vasicek :

Soit r un processus tel que $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$ et $r_0 \in \mathbb{R}$

Remarque : r modélise un taux d'intérêt : $B(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) | \mathcal{F}_s \right]$

Posons : $V_t = r_t - b$. On a : $dV_t = dr_t = -aV_t dt + \sigma dB_t$.

Prix d'un zéro-coupon :

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T V_s ds - b(T-t) \right) | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-b(T-t)} \mathbb{E} [\exp(-(X_T - X_t)) | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{-b(T-t)} \exp \left[-\frac{1}{a} V_t (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du \right]
 \end{aligned}$$

Problème : $\mathbb{P}(r_t < 0) > 0$

Modèle CIR : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$

2.2 Intégrales d'Itô

Définition 26 Un processus φ est dit élémentaire s'il existe $0 = t_0 < \dots < t_n \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des v.a. réelles tel que φ_{i+1} soit $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable et $\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} \mathbf{1}_{\{t_k, t_{k+1}\}}$. On note $\mathcal{E}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des processus élémentaires.

Remarque Les processus élémentaires sont caglad donc progressivement mesurables (c'est le pendant de prévisible pour les processus discrets)

Définition 27 Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$. L'intégrale d'Itô de φ par rapport à B est : $\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$

Propriété

- i) $\int_0^{+\infty} (\varphi + \lambda\psi)_s dB_s = \int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s + \lambda \int_0^{+\infty} \psi_s dB_s$
- ii) Si $\forall i, \varphi_i$ est déterministe, l'intégrale d'Itô et de Wiener coïncident.
- iii) $\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s \right] = 0$ et $\text{Var} \left(\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s \right) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\varphi_s^2] ds$
- iv) Isométrie généralisée : $\mathbb{E} \left[\int_0^t \varphi_u dB_u \int_0^s \psi_u dB_u \right] = \int_0^{t \wedge s} \mathbb{E}[\varphi_u \psi_u] du$

Preuve iii)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\varphi_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\underbrace{\varphi_{k+1}}_{\mathcal{F}_{t_k}\text{-mesurable}} \right] \mathbb{E} \left[\underbrace{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}_{\text{II } \mathcal{F}_{t_k}} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left(\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s \right) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1}^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [\varphi_{i+1} \varphi_{j+1} \times (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\varphi_{k+1}^2] (t_{k+1} - t_k) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [\mathbb{E} [\varphi_{i+1} \varphi_{j+1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}]] \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [\varphi_s^2] ds + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [\varphi_{i+1} \varphi_{j+1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \underbrace{\mathbb{E} [B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}]}_{=0}] \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [\varphi_s^2] ds
\end{aligned}$$

Remarque La propriété d'isométrie permet d'étendre la notion d'intégrale d'Itô aux processus $\varphi \in L_{loc,prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

$$L_{loc,prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+) = \{\varphi \text{ progressivement mesurable, } \forall t \in \mathbb{R}^+, \int_0^t \mathbb{E} [\varphi_s^2] ds < +\infty\}$$

$$L_{prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+) = \{\varphi \text{ progressivement mesurable, } \int_{s \in \mathbb{R}^+} \mathbb{E} [\varphi_s^2] ds < +\infty\}$$

Définition 28 Soit $\varphi \in L_{prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

L 'intégrale d'Itô de φ est $\int_0^{+\infty} \varphi_s dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_s^n dB_s$ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$

où φ^n est une suite de $\mathcal{E}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^{+\infty} \mathbb{E} [(\varphi_s^n - \varphi_s)^2] ds < +\infty$

Justification : voir Revu-j-Yar

idée : $\mathcal{E}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ dense dans $L_{loc,prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$

Extension : Soit $\varphi \in L_{Loc,prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$. L 'intégrale d'Itô de φ est $\int_0^t \varphi_s dB_s = \int_0^{+\infty} \varphi_s \mathbf{1}_{[0;t]} dB_s$

Propriété :

Soit $\varphi \in L_{Loc,prog}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$. On définit M le processus $M_t = \int_0^t \varphi_s dB_s$

i) $\mathbb{E}[M_t] = 0$ et $\text{Var}(M_t) = \int_0^t \mathbb{E} [\varphi_s^2] ds$

ii) M est un processus continu et $\mathbb{F}^B$ -adapté.

iii) M n'est pas gaussien en général.

iv) M est toujours une martingale de carré intégrable.

v) Isométrie : $\mathbb{E} \left[\int_0^t \varphi_u dB_u \int_0^s \psi_u dB_u \right] = \int_0^{t \wedge s} \mathbb{E} [\varphi_u \psi_u] du$

Si on pose : $N_t = \int_0^t \psi_u dB_u$, alors $M_t N_t - \int_0^t \mathbb{E} [\varphi_u \psi_u] du$ est une martingale.

Preuve Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \varphi_s dB_s &= \int_0^{+\infty} \varphi_s 1_{[0;t]} dB_s \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} 1_{]t_k, t_{k+1}]} 1_{[0;t]} \right) dB_s \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} 1_{]t_k \wedge t, t_{k+1} \wedge t]} dB_s \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t})
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\varphi_{k+1} (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}) | \mathcal{F}_s]$

Or :

$$\mathbb{E}[\varphi(B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t})] = \begin{cases} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) & \text{si } t_{k+1} < u < t \\ \varphi_{k+1} (B_u - B_{t_k}) & \text{si } t_k \leq u \leq t_{k+1} \\ 0 & \text{si } u < t_k \end{cases}$$

Finalement : $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{k+1} (B_{t_{k+1} \wedge s} - B_{t_k \wedge s}) = M_s$

Remarque On peut étendre la classe de processus intégrables au sens d'Itô. φ progressivement mesurable, $\int_0^{+\infty} \varphi_s^2 ds < +\infty$ p.s.. Alors M n'est pas forcément une martingale. En fait, M est une martingale locale. On peut avoir $\mathbb{E}[M_t] \neq 0$.

2.3 Processus d'Itô

2.3.1 Généralités

Définition 29 X est un processus d'Itô s'il admet la décomposition suivante : $X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ où X_0 est $\mathcal{F}$ -mesurable, b est un processus progressivement mesurable et $\int_0^{+\infty} |b_s| ds < +\infty$ p.s., σ est un processus progressivement mesurable et $\int_0^{+\infty} \sigma_s^2 ds < +\infty$ p.s.

b est le drift (ou dérive) de X ,

σ est la volatilité (ou coefficient de diffusion) de X

Notation différentielle :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

Propriété La décomposition d'un processus d'Itô est unique.

Preuve

$$\begin{aligned}
\text{Si } X_t &= X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \\
&= X'_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s
\end{aligned}$$

On a de façon évidente que $X_0 = X'_0$

$$\int_0^t (b_s - b'_s) ds = \underbrace{\int_0^t (\sigma'_s - \sigma_s) dB_s}_{\text{martingale locale}}$$

On a vu que si une martingale $M_t = \int_0^t K_s ds$ p.s., alors $M_t = 0$ p.s. pour tout t et donc $K_t = 0$ p.s. Donc : $b_s = b'_s$

$$0 = Var \left(\int_0^t (\sigma'_s - \sigma_s) dB_s \right) = \int_0^t \mathbb{E} [(\sigma'_s - \sigma_s)^2] ds \Rightarrow \sigma'_s = \sigma_s \text{ p.s.}$$

Propriété : Soit X un processus d'Itô. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= X_s + \mathbb{E} \left[\int_s^t b_u du + \int_s^t \sigma_u dB_u | \mathcal{F}_s \right] \\ &= X_s + \mathbb{E} \left[\int_s^t b_u du | \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

si $\sigma \in L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$

Définition 30 *Intégrale d'Itô par un processus d'Itô.*

Soit φ progressivement mesurable, $\int_0^{+\infty} \varphi_s^2 ds < +\infty$ p.s. et X un processus d'Itô. L'intégrale de φ par rapport à X est : $\int_0^t \varphi_s dX_s = \int_0^t \varphi_s b_s ds + \int_0^t \varphi_s \sigma_s dB_s$

2.3.2 Crochet oblique

Définition 31 Soit M une martingale de carré intégrable. Le crochet oblique de M , noté $\langle M \rangle_t$, est l'unique processus $\mathbb{F}$ -adapté, croissant tel que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \leq 0}$ est une martingale.

Notation $\langle M \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$

Justification : $0 = t_0 < \dots < t_n = t$,

$$\begin{aligned} M_t^2 &= M_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} M_{t_{k+1}}^2 - M_{t_k}^2 \\ &= M_0^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} M_{t_k} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s + A_t \text{ où } A \text{ est croissant.} \end{aligned}$$

Exemple 2

- $\langle B \rangle_t = t$
- $\langle \int_0^t f(s) dB_s \rangle_t = \int_0^t f(s)^2 ds$ (Intégrale de Wiener)
- $\langle \int_0^t \varphi_s dB_s \rangle_t = \int_0^t \varphi_s^2 ds$ (Intégrale d'Itô)

Définition 32 : Soient M et N deux martingales de carré intégrable, $\langle M, N \rangle$ est le processus $\mathbb{F}$ -adapté tel que $MN - \langle M, N \rangle$ soit une $\mathbb{F}$ -martingale (ici le processus n'est pas nécessairement croissant).

Exemple 3 $\left\langle \int_0^t \varphi_s dB_s, \int_0^t \psi_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \varphi_s \psi_s ds$

Définition 33 : Soient X et Y deux processus d'Itô tels que $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ et $dY_t = \hat{b}_t dt + \hat{\sigma}_t dB_t$. Le crochet oblique entre X et Y est : $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \hat{\sigma}_s ds$

2.3.3 Lemme d'Itô

Première forme du lemme d'Itô :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, X un processus d'Itô.

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \int_0^t f'(X_s) \sigma_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds \end{aligned}$$

Idée de preuve : Soit $0 = t_0 < \dots < t_n = t$.

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{t_{k+1}}) - f(X_{t_k}) \\ &= f(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) f'(X_{t_k}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 f''(X_{t_k}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} o(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{X_{t_{k+1}} - X_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \right)^2}_{\rightarrow \sigma_s^2} f''(X_{t_k}) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$$

$$\mathbb{E} \left[(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] = 0$$

$$\text{Donc : } \frac{(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2}{t_{k+1} - t_k} \simeq \sigma_{t_k}^2$$

Remarque Sous forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \underbrace{d\langle X \rangle_t}_{\sigma_t^2 dt}$$

Quelques applications

- 1) Montrer que $B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s$
On considère la fonction $f(x) = x^2$, on a donc $B_t^2 = f(B_t)$. D'après le lemme d'Itô :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

- 2) Écrire la décomposition en processus d'Itô de B_t^α . On pose $f(x) = x^\alpha$.

$$d(B_t^\alpha) = \underbrace{\alpha B_t^{\alpha-1} dB_t}_{\text{volatilité}} + \underbrace{\frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) B_t^{\alpha-2} dt}_{\text{drift}}$$

$$X_t = B_t^\alpha - \int_0^t \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} B_s^{\alpha-2} ds = \alpha \int_0^t B_s^{\alpha-1} dB_s$$

X_t martingale locale	ssi	$\int_0^t B_s^{2\alpha-2} ds < +\infty$
	ssi	$\int_0^t s^{\alpha-1} ds < +\infty$
	ssi	$\alpha > 0$
X_t martingale	ssi	$\int_0^t \mathbb{E}[B_s^{2\alpha-2}] ds < +\infty$
	ssi	$\int_0^t s^{\alpha-1} \mathbb{E}[G^{2\alpha-2}] ds$
	ssi	$\alpha > 0$ et $\mathbb{E}[G^{2\alpha-2}] < +\infty$

Propriété $X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ un processus d'Itô.

X_t est une martingale locale si et seulement si $\forall t \geq 0, b_t = 0$ p.s.

X_t est une martingale si et seulement si $\forall t \geq 0, b_t = 0$ p.s. et $\int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\sigma_s^2] ds < \infty$

3) $d(K - B_t) = ?$ cf b) exo 1 Intégrale d'Itô.

Résoudre une équation Différentielle Stochastique

1) $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$

Or d'après le lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} d\langle S \rangle_t \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

En intégrant : $\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t$ donc : $S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right]$

2) Équation de Langevin : $dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t$

i) Résoudre l'équation homogène : $dV_t = -aV_t dt \Rightarrow V_t = K e^{-at}$

ii) Variation de la constante

$$\begin{aligned} V_t &= K_t e^{-at} \\ dV_t &= K_t d(e^{-at}) + e^{-at} d(K_t) \\ &= -aK_t e^{-at} dt + e^{-at} dK_t \\ &= -aV_t dt + e^{-at} dK_t \end{aligned}$$

Or $dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t$

On cherche K_t tel que $e^{-at} dK_t = \sigma dB_t$. D'où $K_t - K_0 = \int_0^t \sigma e^{au} dB_u$.

Finalement : $V_t = \left(K_0 + \int_0^t \sigma e^{au} dB_u \right) e^{-at}$

Théorème 2.3.1 Formule d'Itô

Soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, X un processus d'Itô.

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

Formule d'Itô multidimensionnelle

Soit $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$ un brownien dans $\mathbb{R}$.

Pour $i, j \in [1, d]$, $\text{corr}(B^{(i)} B^{(j)}) = \rho_{i,j}$, i.e. $B_t^{(i)} B_t^{(j)} - \rho_{i,j} t$ est une martingale.

Soit $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ un processus d'Itô dans $\mathbb{R}^n$:

$$dX_t^{(i)} = b_t^{(i)} dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{(i,j)} dB_t^{(j)}$$

$$dX_t = B_t dt + \sum_t dB_t \text{ où } B_t = \begin{pmatrix} b_t^{(1)} \\ \vdots \\ b_t^{(n)} \end{pmatrix} \text{ et } \sum_t = (\sigma_t^{i,j})_{n \times d}$$

Soit $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla f \cdot dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a_{i,j} dt \end{aligned}$$

$$a_{i,j}^t = \left\langle \int \sum_{k=1}^d \sigma_t^{(i,k)} dB_t^{(k)}, \int \sum_{l=1}^d \sigma_t^{(j,l)} dB_t^{(l)} \right\rangle$$

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sigma_t^{(i,k)} \sigma_t^{(j,k)} \cdot \rho_{k,l}$$

2.3.4 Équation différentielle stochastiques (EDS)

Définition 34 Soit $(b, \sigma) : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2$.

$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ EDS

Un processus X est solution de l'EDS si X est :

- continu,
- adapté,
- $\int_0^t |b(s, X_s)| ds < +\infty$ p.s.,
- $\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < +\infty$ p.s.,
- $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$

Théorème 2.3.2 Si b et σ vérifient les conditions suivantes :

- i) b et σ sont continus
- ii) $\exists K > 0, \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| < K|x - y|$
- iii) $\exists K > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 < K(1 + |x|^2)$

$$\text{Alors l'EDS : } \begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

admet une unique solution (au sens p.s.). Dans ce cas, $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < +\infty$

Preuve : (idée)

On pose : $\mathcal{S} = \{X, \|X\|_{\mathcal{S}} = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right] < +\infty\}$

Pour $X \in \mathcal{S}$, on pose : $F(X)_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$

i) F est bien défini

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds \leq K \int_0^t (1 + |X_s|) ds \leq K(1 + \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|)T$$

$$\text{idem pour } \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < +\infty$$

ii) Si $X \in \mathcal{S}$, $F(X) \in \mathcal{S}$

En utilisant l'égalité suivante : $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, on obtient :

$$(F(X)_t)^2 \leq 3 \left(X_0^2 + \left(\int_0^t b(s, X_s) ds \right)^2 + \left(\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \right)^2 \right) \leq 3(X_0^2 + K(1 + \sup(X_s))^2 T^2 (\dots)^2)$$

iii) F est contractante

$$\|F(X) - F(Y)\|_{\mathcal{S}} \leq \rho \|X - Y\|_{\mathcal{S}} \text{ où } \rho \in [0, 1[$$

iv) Conclusion

$$\text{Soit } X \in \mathcal{S}, \quad \begin{cases} X_n = F(X_{n-1}) & n \geq 1 \\ X_0 = X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|X_n - X_{n-1}\|_{\mathcal{S}} &= \|F(X_{n-1}) - F(X_{n-2})\|_{\mathcal{S}} \\ &\leq \rho \|X_{n-1} - X_{n-2}\|_{\mathcal{S}} \\ &\leq \underbrace{\rho^n \|X_1 - X_0\|_{\mathcal{S}}}_{\rightarrow 0 \text{ (} |\rho| < 1 \text{)}} \end{aligned}$$

$(X_n)_n$ est de Cauchy, comme $\mathcal{S}$ est complet, X_n converge vers $X \in \mathcal{S}$

Propriété Soient b, σ vérifiant *i*), *ii*) et *iii*) du théorème.

Notons $X^{t,x}$ la solution de : $\begin{cases} dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s, X_s^{t,x})dB_s \\ X_t^{t,x} = x \end{cases}$

On a : $X_s^{0,x} = X_s^{t, X_t^{s,x}}$ p.s.

Conséquence X est markovien.

Définition 35 *Modèle de Cox Ingersoll Ross (CIR)*

r suit un modèle CIR $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$ où $ab > 0$

Remarque $T_0^x = \inf\{t > 0 \mid r_t^{0,x} = 0\}$

Si $2ab > \sigma$, $\mathbb{P}(T_0^x = +\infty) = 1$

Si $2ab < \sigma$ et $a > 0$, $\mathbb{P}(T_0^x < +\infty) = 1$

Si $2ab < \sigma$ et $a < 0$, $\mathbb{P}(T_0^x = +\infty) \in]0, 1[$

Propriété $\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})$

$$Var(r_t | \mathcal{F}_s) = \frac{r_s}{a} \sigma^2 (e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}) + \frac{b\sigma^2}{2a} (1 - e^{-a(t-s)})^2$$

Preuve Calcul de $\mathbb{E}[r_t | r_s]$

On intègre l'équation entre s et t :

$$r_t - r_s = a \int_s^t (b - r_u) du + \sigma \int_s^t \sqrt{r_u} dB_u$$

On prend l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[r_t | r_s] - r_s = a \int_s^t (b - \mathbb{E}[r_u | r_s]) du \text{ car } \int_0^t \sqrt{r_u} dB_u \text{ est une martingale.}$$

On pose $f(t) = \mathbb{E}[r_t | r_s]$ pour $t \geq s$ d'où :

$$f(t) = r_s + a \int_s^t (b - f(u)) du.$$

On dérive cette équation par rapport à t :

$$f'(t) = a(b - f(t)) \text{ donc } f(t) = Ke^{-at} + b$$

$$r_s = f(s) = Ke^{-as} + b \Rightarrow K = (r_s - b)e^{as}$$

Conclusion : $\mathbb{E}[r_t | r_s] = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b$

Calcul de $g(t) = \text{Var}(r_t | r_s)$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathbb{E} \left[\left(r_t - b - (r_s - b)e^{-a(t-s)} \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left((r_s - b)(1 - e^{-a(t-s)}) + a \int_s^t (b - r_u) du + \sigma \int_s^t \sqrt{r_u} dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \mathbb{E}[(r_t - b)^2 | \mathcal{F}_s] + (r_s - b)^2 e^{-2a(t-s)} - 2(r_s - b)e^{-a(t-s)} \underbrace{\mathbb{E}[(r_t - b) | \mathcal{F}_s]}_{(r_s - b)e^{-a(t-s)}} \\
 &= \mathbb{E}[(r_t - b)^2 | \mathcal{F}_s] - (r_s - b)e^{-2a(t-s)}
 \end{aligned}$$

On pose $Y_t = (r_t - b)^2$

$$\begin{aligned}
 dY_t &= 2(r_t - b)dr_t + \frac{1}{2} \times 2d \langle r \rangle_t \\
 &= 2(r_t - b)a(r_t - b)dt + 2(r_t - b)\sigma\sqrt{r_t}dB_t + \sigma^2 r_t dt \\
 &= (2aY_t + \sigma^2 r_t)dt + 2\sigma\sqrt{r_t}(r_t - b)dB_t
 \end{aligned}$$

On intègre entre s et t :

$$Y_t = Y_s + \int_s^t (2aY_u + \sigma^2 r_u)du + M_t - M_s$$

où $M_t = \int_0^t 2\sigma\sqrt{r_u}(r_u - b)dB_u$ martingale

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = Y_s + \int_s^t 2a\mathbb{E}[Y_u | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[r_u | \mathcal{F}_s]du.$$

On pose $h(t) = \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s]$

$$h(t) = (r_s - b)^2 + \int_s^t 2ah(u) + (b - (r_s - b)e^{-a(t-s)})du$$

On dérive par rapport à t : $h'(t) = 2ah(t) + b + (r_s - b)e^{-a(t-s)}$.

$$\text{Donc } h(t) = \underbrace{Ke^{2at}}_{\text{homogène}} + \underbrace{?}_{\text{particulière}}$$

On cherche une solution sous la forme : $h(t) = K(t)e^{2at}$

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= e^{2at}(K'(t) + 2aK(t)) \\
 &= 2ah(t) + b + (r_s - b)e^{-a(t-s)}
 \end{aligned}$$

Il faut que $K'(t) = e^{-2at}(b + (r_s - b)e^{-a(t-s)})$ (à finir)

Conclusion : $g(t) = K(t)e^{2at} - (r_s - b)e^{-2a(t-s)}$ où $K(t) = K + \int_s^t e^{-2au}(b + (r_s - b)e^{-a(u-s)})du$.

On trouve K avec la condition $h(s) = (r_s - b)^2$

Propriété Prix d'un zéro-coupon

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] = G(t, r_t)$$

où $G(t, x) = \phi(T - t) \exp(-x\psi(T - t))$, $\phi(s)$, $\psi(s)$ explicites.

Définition 36 : Soit X un processus. On appelle fonction d'échelle de X une fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $s(X)$ est une martingale.

Soit Z solution d'une EDS homogène : $dZ_t = b(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dB_t$

Déterminer une fonction d'échelle de Z . Supposons qu'il existe s telle que $s(Z)$ soit une martingale.

Mauvaise idée : $\mathbb{E}[s(Z_t) | \mathcal{F}_s] = s(Z_s)$

Bonne idée : On suppose que s est C^2 .

$$\begin{aligned} d(s(Z_t)) &= s'(Z_t)dZ_t + \frac{1}{2}s''(Z_t)d\langle Z \rangle_t \\ &= (b(Z_t)s'(Z_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(Z_t)s''(Z_t))dt + s'(Z_t)\sigma(Z_t)dB_t \end{aligned}$$

On cherche s solution de l'ED : $b(x)s'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)s''(x) = 0$

$$\ln(s'(x))' = \frac{s''(x)}{s'(x)} = -\frac{2b(x)}{\sigma^2(x)}$$

$$\ln(s'(x)) = -\int_c^x \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)} dz$$

$$s(x) = \int_c^x \exp\left(-\int_c^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)} dz\right) dy$$

Application : Temps d'atteinte

Soit $x < z < y$. On pose : $T_x = \inf\{t \leq 0, Z_t^{0,z} \geq x\}$ et $T_y = \inf\{t \leq 0, Z_t^{0,z} \geq y\}$

On note $Z^{0,z}$ la solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dZ_t = b(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dB_t \\ Z_0 = z \end{cases} \quad \text{On veut calculer } \mathbb{P}(T_x < T_y). \text{ Comme } s(Z_t)$$

est une martingale et $T = T_x \wedge T_y$ (sous des bonnes conditions d'intégrabilité), d'après le théorème d'arrêt de Doob :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s(Z_t)] &= s(Z_0) \\ &= s(z) \\ &= \mathbb{E}[s(Z_{T_x})\mathbf{1}_{\{T_x < T_y\}}] + \mathbb{E}[s(Z_{T_y})\mathbf{1}_{\{T_y \leq T_x\}}] \\ &= s(x)\mathbb{P}(T_x < T_y) + s(y)(1 - \mathbb{P}(T_x < T_y)) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \mathbb{P}(T_x < T_y) = \frac{s(z) - s(y)}{s(x) - s(y)}$$

Chapitre 3

Changement de probabilité

On se place dans le modèle de Black& Scholes :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

$$d\tilde{S}_t = d(e^{-rt}S_t) = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \quad \tilde{S} \text{ est une martingale} \Leftrightarrow \mu = r$$

Il faut trouver une probabilité $\mathbb{P}^*$ telle que $\tilde{S}$ soit une $\mathbb{P}^*$ -martingale. On cherche $\mathbb{P}^*$ telle que :

$$B_t^* = (\mu - r)t + \sigma B_t \text{ soit une } \mathbb{P}^*\text{-brownien. } d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t dB_t^*$$

3.1 Probabilités équivalentes

Définition 37 $\mathbb{P}$ est équivalente à $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$, si pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

Remarque $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \text{propriété } \mathbb{P} \text{ p.s.} & \Leftrightarrow \text{propriété } \mathbb{Q} \text{ p.s.} \\ \text{Loi de } X \text{ sous } \mathbb{P} & \neq \text{Loi de } X \text{ sous } \mathbb{Q} \end{cases}$

Théorème 3.1.1 de Radon-Nykodim (Caractérisation)

$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ ssi il existe une v.a. L , $\mathcal{B}$ -mesurable telle que :

$$\forall \omega, \quad \mathbb{Q}(\omega) = L(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

$$\text{Si } A \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L \cdot 1_A]$$

$$\text{Si } X \text{ v.a., } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L \cdot X]$$

Preuve ($\Rightarrow$) admis

($\Leftarrow$) Soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$

$$0 = \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{L}1_A\right] \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

Propriété Soit $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Il existe une $\mathbb{P}$ -martingale (L_t) strictement positive telle que $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = L_t \cdot \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$

Preuve On a $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ d'après le théorème de Radon-Nykodim, $\exists L_T > 0$, $\mathcal{F}_T$ -mes telle que $\mathbb{Q} = L_T \cdot \mathbb{P}$. On pose $L_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T | \mathcal{F}_t]$. L est une martingale positive. Soit $A \in \mathcal{F}_t$.

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(A) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T 1_A] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T | \mathcal{F}_t] 1_A] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t \cdot 1_A] \end{aligned}$$

3.2 Théorème de Girsanov

Propriété Soit (B) un $\mathbb{P}$ -mouvement brownien. On pose $B_t^* = mt + B_t$ ($\sim \mathcal{N}(mt, t)$). B^* est un brownien (standard) sous $\mathbb{P}^*$ tel que :

$$\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}^* = L_t \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t} \text{ où } L_t = e^{-\frac{m}{\sigma^2} B_t - \frac{m^2 t}{2\sigma^2}}$$

Preuve Montrons que B^* est un $\mathbb{P}^*$ brownien. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_t = \exp(\lambda B_t^* - \frac{\lambda^2}{2} t)$. Il suffit de montrer que M est une $\mathbb{P}^*$ -martingale. Soit $s \leq t$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[M_t | \mathcal{F}_s] \stackrel{?}{=} M_s$.

Lemme $X \mathcal{F}_t$ -mes, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{L_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t X | \mathcal{F}_s]$

Rappel $Z = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X | \mathcal{F}_s]$ ssi $\forall Y \in \mathcal{F}_s$ -mes, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[ZY] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[XY]$

Preuve (du Lemme) Posons $Z = \frac{1}{L_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t X | \mathcal{F}_s]$. Soit $Y \mathcal{F}_s$ -mes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[ZY] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_s ZY] \text{ car } ZY \mathcal{F}_s\text{-mes} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t X | \mathcal{F}_s] Y] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t \underbrace{XY}_{\mathcal{F}\text{-mes}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[XY] \end{aligned}$$

On a donc d'après le lemme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{A}{L_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t M_t | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{1}{L_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-mB_t - \frac{m^2 t}{2}} e^{\lambda B_t + \lambda mt - \frac{\lambda^2 t}{2}} | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{1}{L_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{(\lambda-m)B_t - \frac{(\lambda-m)^2}{2} t} | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

Comme B est un $\mathbb{P}$ -mouvement brownien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{1}{L_s} e^{(\lambda-m)B_s - \frac{(\lambda-m)^2}{2} s} \\ &= e^{\lambda B_s - \left(\frac{(\lambda-m)^2}{2} - m^2\right) s} \\ &= e^{\lambda B_s^* - \frac{\lambda^2}{2} s} \\ &= M_s \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1 de Girsanov

Soit $\theta \in L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{F}\text{-adapté})$.

Soit $L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$. Soit $\mathbb{P}^*$ la probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ de densité L_T .

Si $\mathbb{E}[L_T] = 1$, alors le processus $B_t^* = B_t - \int_0^t \theta_s ds$ est un brownien sous $\mathbb{P}^*$.

Remarque La condition de Novikov : si $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < +\infty$ alors $\mathbb{E}[L_T] = 1$.

$\theta \in L^2$
 $L_t = \exp \left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right), \mathbb{E}[L_t] = 1$
 $\mathbb{Q} = L_t \mathbb{P}$
 Sous $\mathbb{Q}$, $B_t^* = B_t - \int_0^t \theta_s ds$ est un brownien.

Remarque $dL_t = L_t \theta_t dB_t$

Théorème 3.2.2 Soient B^1, B^2 deux $\mathbb{P}$ -browniens. On considère θ^1 et θ^2 dans $L^2([0, T] \times \Omega)$.

$$L_t^i = \exp \left(\int_0^t \theta_s^i dB_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^i)^2 ds \right) \quad i \in \{1, 2\}$$

On pose : $\mathbb{Q} = L_t \mathbb{P}$ où L_t est solution de $dL_t = L_t(\theta_t^1 dB_t^1 + \theta_t^2 dB_t^2)$

Remarque Si $\rho = 0$, $L_t = L_t^1 L_t^2$

Sous $\mathbb{Q}$, $B_t^{*,i} = B_t^i - \int_0^t \theta_s^i ds - \rho \int_0^t \theta_s^j ds \quad (i \neq j \in \{1, 2\})$ est un brownien.

3.3 Théorème de représentation des martingales

Théorème 3.3.1 d'Itô (admis)

Soit $X \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_T^B$ -mes.

Il existe $\theta \in L^2(\Omega \times [0, T])$, progressivement mesurable tel que $X = \mathbb{E}[X] + \int_0^T \theta_s dB_s$

Théorème 3.3.2 de représentation des martingales :

Soit M une martingale de carré intégrable, alors il existe $\theta_s \in L^2(\Omega \times [0, T])$, progressivement mesurable tel que $M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t \theta_s dB_s$

Preuve D'après le théorème d'Itô,

$$M_t = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^t \theta_s dB_s \text{ où } \theta_s \in L^2(\Omega \times [0, T])$$

On prend l'espérance conditionnelle à $\mathcal{F}_t$: $M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t \theta_s dB_s$

Chapitre 4

Applications en finance

4.1 Marchés financiers

Définition 38 : Un marché financier est un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ et $d + 1$ processus S^i tq $S_t^0 = e^{rt}$ où $r > 0$
Pour $1 \leq i \leq d$, S^i est $\mathbb{F}$ -adapt

On considère un marché financier composé de 2 actifs.
 $S_t^0 = e^{rt}$, $dS_t = S_t(b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t)$ où B est un brownien, $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$, b et σ satisfont les bonnes hypothèses (lipschitziens et de croissance au plus linéaire)

4.2 Portefeuille

Définition 39 : $\Phi = (\varphi^0, \varphi)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est un portefeuille admissible si Φ est prog-mes et $\in L^2([0, T] \times \Omega)$.

La valeur du portefeuille associé à Φ est : $V_t(\Phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$

Définition 40 : Φ est autofinancé si $\forall t \in [0; T]$, $dV_t(\Phi) = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t S_t$

Remarque

$$\begin{aligned} dV_t(\Phi) &= d\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t^0 dS_t^0 + d\langle \varphi^0, S^0 \rangle_t \\ &+ d\varphi_t S_t + \varphi_t dS_t + d\langle \varphi, S \rangle_t \\ &= d\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t^0 dS_t^0 + d\varphi_t S_t + \varphi_t dS_t + d\langle \varphi, S \rangle_t \end{aligned}$$

car $d\langle \varphi^0, S^0 \rangle_t = 0$ car S^0 est déterministe.

Ainsi, Φ est déterministe si $S_t^0 d\varphi_t^0 + S_t d\varphi_t + d\langle \varphi, S \rangle_t = 0$

Définition 41 : Φ est une stratégie d'arbitrage si :

- i) Φ est admissible
- ii) $V_0(\Phi) = 0$
- iii) $V_T(\Phi) \geq 0$ p.s. et $\mathbb{P}(V_T(\Phi) > 0) > 0$

Remarque S'il existe une probabilité $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tq $\tilde{S}$ soit une $\mathbb{Q}$ -martingale alors il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Preuve Supposons qu'il existe une stratégie d'arbitrage Φ .

$$\text{On a : } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T(\Phi)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_0(\Phi)] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \theta_s dB_s^* \right] = 0 + 0 = 0$$

$$\text{Comme } \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_T(\Phi)] = 0$$

Théorème 4.2.1 *Le marché est viable.*

Preuve

Étape 1 : On cherche $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que $\tilde{S}$ soit une $\mathbb{Q}$ -martingale.

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t) \\ d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_tdt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((b(t, S_t) - r)dt + \sigma(t, S_t)dB_t) \\ &= \sigma(t, S_t)\tilde{S}_t \left(\frac{b(t, S_t) - r}{\sigma(t, S_t)}dt + dB_t \right) \end{aligned}$$

On cherche $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que sous $\mathbb{Q}$, $B_t^* = B_t - \int_0^t \frac{r-b(s, S_s)}{\sigma(s, S_s)} ds$ est brownien.

On pose : $L_t = \exp \left(\int_0^t \lambda_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right)$ où $\lambda_s = \frac{r-b(s, S_s)}{\sigma(s, S_s)}$ (prime de risque du sous-jacent)

D'après le théorème de Girsanov : sous $\mathbb{Q} = L_t \mathbb{P}$, B^* est un brownien.

Étape 2 : Soit Φ une stratégie admissible, $V_T(\Phi) \geq 0$ p.s. et $V_0(\Phi) = 0$.

Alors $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T(\Phi)] = 0$ (par le théorème de représentation d'Itô)

Comme $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_T(\Phi)] = 0$

Donc : $V_T(\Phi) = 0$ p.s.

Théorème 4.2.2 *Le marché est complet.*

Preuve Soit $X \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_T$ -mes.

Il existe $\theta \in L^2(\Omega \times [0, T])$, prog mes tq $X = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] + \int_0^T \theta_s dB_s$ (Représentation d'Itô)

Montrons qu'il existe Φ autofinancé tel que $V_T(\Phi) = X = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] + \int_0^T \theta_s dB_s^*$

Soit Φ un portefeuille autofinancé :

$$\begin{aligned} dV_t(\Phi) &= \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t S_t \\ V_t(\Phi) &= \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t \text{ donc } \varphi_t^0 = \tilde{V}_t(\Phi) - \varphi_t \tilde{S}_t \\ dV_t(\Phi) &= r(\tilde{V}_t(\Phi) - \varphi_t \tilde{S}_t) S_t^0 dt + \varphi_t dS_t \\ &= rV_t(\Phi) dt + \varphi_t (dS_t - rS_t dt) \end{aligned}$$

$$\underbrace{dV_t(\Phi) - rV_t(\Phi)dt}_{e^{rt}d(e^{-rt}V_t(\Phi))} = \varphi_t \underbrace{(dS_t - rS_t dt)}_{e^{rt}d(e^{-rt}S_t)}$$

$$\text{Donc : } d\tilde{V}_t(\Phi) = \varphi_t d\tilde{S}_t = \varphi_t \sigma(t, S_t) \tilde{S}_t dB_t^*$$

$$\text{On intègre entre 0 et T : } e^{-rT} V_T(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^T \varphi_t \sigma(t, S_t) \tilde{S}_t dB_t^*$$

Soit Φ tel que $V_0(\Phi) = \varphi_0^0 + \varphi_0 S_0 = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ et $\varphi_t = \frac{\theta_t}{\sigma(t, S_t) \tilde{S}_t} e^{rT}$ et φ_t^0 tel que Φ soit autofinancé.

$$\text{On a alors : } V_T(\Phi) = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]}_{e^{rt} V_0(\Phi)} + \underbrace{\int_0^T \theta_t dB_t^*}_{\int_0^T \varphi_t \sigma(t, S_t) \tilde{S}_t e^{rT} dB_t^*} = X$$

4.3 Valorisation d'option

Soit $X \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_T$ mesurable. X est le pay-off d'une option ($X = f(S_t)$).
 X est simulable, il existe Φ tel que $X = V_T(\Phi)$
 Le prix de l'option sur X à l'instant t est $V_t(\Phi)$.

$$\begin{aligned} P_t &= V_t(\Phi) \\ &= e^{rt} \tilde{V}_t(\Phi) \\ &= e^{rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T(\Phi) | \mathcal{F}_t] \text{ car } \tilde{V} \text{ } \mathbb{Q}\text{-martingale} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} V_T(\Phi) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

4.4 Couverture de l'option

→ Déterminer Φ autofinancé $V_T(\Phi) = X$

On a vu que $\varphi_t = \frac{\theta_t e^{-rT}}{\sigma(t, S_t) \tilde{S}_t}$ convenait, malheureusement θ est inconnu.

→ On remarque que S est markovien, donc $P_t = P(t, S_t)$ où $P(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} X | S_t = x]$.

On remarque que $e^{-rt} P_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} X | \mathcal{F}_t]$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale.

$$d(e^{-rt} P_t) \stackrel{It}{=} EDP(t, S_t) dt + e^{-rt} \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) d\tilde{S}_t$$