ENSIIE
 2$^{\text{ème}}$ semestre 2015/2016

2ème année
 Calcul stochastique

Devoir Surveillé

Durée: 2h

Calculatrice, téléphone et documents non autorisés

Dans tous les exercices, B est un mouvement brownien standard et $\mathbb{F}$ sa filtration naturelle.

Exercice 1. Mouvements brownien
Les processus suivants sont-ils des mouvements brownien:

a) X défini par $X_t = \sqrt{t}B_1$ pour $t \geq 0$.

b) Y défini par $Y_t = 2\left(B_{1+\frac{t}{4}} - B_1\right)$ pour $t \geq 0$.

c) Z défini par $Z_t = B_{2t} - B_t$ pour $t \geq 0$.

Exercice 2. Pont Brownien et intégrale de Wiener
Pour $0 \leq t \leq 1$, on pose $X_t = \int_0^t \frac{X_s}{s-1} ds + B_t$.

a) Montrer que

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$$

b) Montrer que X est un processus gaussien et préciser sa loi.

c) Montrer que X est indépendant de B_1

Exercice 3. Temps d'atteinte
On pose $T_1^* = \inf\{s \geq 0 :| B_s |= 1\}$ et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, X est le processus défini par

$$X_t = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathrm{sh}\left(\lambda(B_t+1)\right), \quad t \geq 0, \quad \text{où } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Montrer que X est une $\mathbb{F}$-martingale.

b) Montrer que pour $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_1^*\wedge t}\mathrm{sh}\left(\lambda(B_{T_1^*\wedge t}+1)\right)] = \mathrm{sh}(\lambda).$$

Après avoir justifier que $T_1^* < +\infty$ p.s., en déduire que

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_1^*}\mathbb{1}_{\{B_{T_1^*}=1\}}] = \frac{\mathrm{sh}(\lambda)}{\mathrm{sh}(2\lambda)}.$$

c) En déduire la transformée de Laplace de T_1^*.

d) Pour $a > 0$, en déduire la transformée de Laplace de $T_a^* = \inf\{s \geq 0 :| B_s |= a\}$. (On utilisera la propriété de scaling).

Exercice 4. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck
Soit X solution de $dX_t = (a - bX_t)dt + dB_t$.

a) Montrer que le procvessus Z est une martingale (locale) où Z est défini par

$$Z_t = \exp\left(c\int_0^t X_s\,dB_s - \frac{c^2}{2}\int_0^t X_s^2\,ds\right), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

b) Soit $U := (X_t^2)_{t\geq 0}$. Calculer la différentielle de U puis écrire U comme somme d'intégrales.

c) En déduire une expression de $\int_0^t X_s\,dB_s$.