Chapitre VI:
Convergences

1. Convergence des variables aléatoires

Que veut dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge vers f ?

Que veut dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge vers f?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Que veut dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge vers f?

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence simplement vers f.

Que veut dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge vers f?

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence simplement vers f.

Nous avons la même notion pour les v.a.r.

$X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ converge simplement vers X si
$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. qui sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$. Lorsque n est grand, on s'attend à ce que la proportion de 1 soit à peu près égale à p. Mathématiquement, on voudrait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} = p \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega\,.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. qui sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$. Lorsque n est grand, on s'attend à ce que la proportion de 1 soit à peu près égale à p. Mathématiquement, on voudrait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} = p \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega \, .$$

Cela est faux!!!

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. qui sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$. Lorsque n est grand, on s'attend à ce que la proportion de 1 soit à peu près égale à p. Mathématiquement, on voudrait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} = p \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega\ .$$

Cela est faux!!!

On a même $\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega)+\ldots+X_n(\omega)}{n} = 0$ pour tout ω dans l'ensemble $A = \{\omega : \text{il n'y a qu'un nombre fini de tirages } 1\}$

Définition (Convergence presque sûre)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. converge presque sûrement vers une v.a. X si l'ensemble N des ω tels que la suite numérique $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $X(\omega)$ vérifie $\mathbb{P}(N) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \ \ p.s. \quad ou \ X_n \to X \ \ p.s.$$

Définition (Convergence dans L^p)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. converge dans L^p (où $p \geq 1$) vers une v.a. X si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les X sont dans L^p, et si on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|^p\big) = 0 \ .$$

On dit aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers X, et on écrit

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \ .$$

- $p = 1$ on dit convergence en moyenne
- $p = 2$ on dit convergence en moyenne quadratique

Définition (Convergence en probabilité)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a. converge en probabilité vers une v.a.* X *si pour tout* $\epsilon > 0$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0$$

ou plus simplement: $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ *quand* $n \to \infty$. *On écrit alors*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \ .$$

Proposition (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *et* X *des variables aléatoires réelles définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si pour tout $\epsilon > 0$ *on a* $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \epsilon\} < \infty$ *alors* $X_n \to X$ *p.s.*

Théorème

On a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = 0 .$$

Théorème

On a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0 .$$

Remarque

On peut faire la preuve pour toute fonction f *bornée, croissante, continue et nulle en* 0. *Donc on a*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \text{ si et seulement si } \mathbb{E}(f(X_n - X)) \to 0 .$$

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a.*

a) *si* $X_n \xrightarrow{L^P} X$ *alors on a* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

b) *si* $X_n \to X$ *p.s. alors on a* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Réciproque?

Réciproque?

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et que $|X_n| \leq Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où Y est une v.a. appartenant à L^p pour un $p \geq 1$. On a alors $X \in L^p$ et $X_n \xrightarrow{L^P} X$.

Réciproque?

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et que $|X_n| \leq Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où Y est une v.a. appartenant à L^p pour un $p \geq 1$. On a alors $X \in L^p$ et $X_n \xrightarrow{L^P} X$.

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Il existe alors une sous suite n_k de la suite des entiers telle que $X_{n_k} \to X$ p.s.

Théorème (Convergence et continuité)

Soit f *une fonction continue.*

a) *si* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *alors on a* $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

b) *si* $X_n \to X$ *p.s. alors on a* $f(X_n) \to f(X)$ *p.s.*

Théorème (Convergence et continuité)

Soit f une fonction continue.

a) *si* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *alors on a* $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

b) *si* $X_n \to X$ *p.s. alors on a* $f(X_n) \to f(X)$ *p.s.*

Remarque

On peut affaiblir l'hypothèse de continuité de la fonction f pour la convergence presque sûr, il suffit que f soit continue sur un ensemble C et que $P(X \in C) = 1$.

Théorème (Théorème de convergence)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) *Convergence monotone : si les* X_n *sont positives et croissent presque sûrement vers* X*, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]\ .$$

Théorème (Théorème de convergence)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) *Convergence monotone : si les* X_n *sont positives et croissent presque sûrement vers* X, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] \, .$$

b) *Convergence dominée ou Lebesgue : si les* X_n *convergent presque sûrement vers* X *et si* $|X_n| \leq Y$ *p.s. pour tout* n *où* $Y \in L^1$ *alors* $X_n \in L^1$, $X \in L^1$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] \, .$$

Théorème (Théorème de convergence)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) *Convergence monotone : si les* X_n *sont positives et croissent presque sûrement vers* X, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]\,.$$

b) *Convergence dominée ou Lebesgue : si les* X_n *convergent presque sûrement vers* X *et si* $|X_n| \leq Y$ *p.s. pour tout* n *où* $Y \in L^1$ *alors* $X_n \in L^1$, $X \in L^1$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]\,.$$

c) *Lemme de Fatou : si les* X_n *vérifient* $X_n \geq Y$ *p.s. avec* $Y \in L^1$, *alos*

$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty} X_n] \leq \varliminf \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Cela est vrai en particulier si $X_n \geq 0$ *p.s.*

2. Convergence en loi

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* X *des v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On a* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

pour toute fonction réelle continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

support compact

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* X *des v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*. On a* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

pour toute fonction réelle continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$*.*

On peut remplacer continue par uniformément continue ou par lipschitz.

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* X *des v.a. toutes définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Si la suite de v.a.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *en probabilité, alors* X_n *converge aussi vers* X *en loi.*

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des v.a. toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité, alors X_n converge aussi vers X en loi.

Théorème (Réciproque partielle)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des v.a. toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X_n converge en loi vers X et si de plus X est p.s. égale à une constante, alors X_n converge en probabilité.

Théorème (Théorème de Slutsky)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*
Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *et que* $||X_n - Y_n|| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$*. Alors* $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*.*

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. dans* $\mathbb{R}^d$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si* $\phi_{X_n}(x) \to \phi_X(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. dans* $\mathbb{R}^d$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si* $\phi_{X_n}(x) \to \phi_X(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

Théorème

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. dans* $\mathbb{R}^d$ *telle que* $\phi_{X_n}(x) \to \phi(x)$ *et si* ϕ *est continue en 0, alors* ϕ *est la fonction caractéristique d'une v.a.* X. *De plus* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition (Convergence en loi et fonction de répartition)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. définie pour tout* n *sur un espace de probabilité* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ *de fonction de répartition* F_{X_n} *et soit* X *une v.a.r. définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *de fonction de répartition* F_X*. La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* X *si et seulement si la suite* $(F_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $F_X(x)$ *en tout point de continuité de* F_X*.*