Exercice 1

1. On calcule tout d'abord la loi conjointe des variables aléatoires (X_1, X_1+X_2). Nous avons clairement, pour $k \geq \ell$,

$$\mathbb{P}\left[X_1=\ell, X_1+X_2=k\right]=\mathbb{P}\left[X_1=\ell\right] \mathbb{P}\left[X_2=k-\ell\right]$$

et

$$\mathbb{P}\left[X_1+X_2=k\right]=\sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}\left[X_1=m\right] \mathbb{P}\left[X_2=k-m\right] .$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}\left[X_1=\ell \mid X_1+X_2=k\right]=\frac{\mathbb{P}\left[X_1=\ell\right] \mathbb{P}\left[X_2=k-\ell\right]}{\sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}\left[X_1=m\right] \mathbb{P}\left[X_2=k-m\right]} ,$$

Dans ce cas particulier

$$\mathbb{P}\left[X_i=k\right]=\binom{n_i}{k} p_i^k\left(1-p_i\right)^{n_i-k} , i=1,2$$

2. L'espérance conditionnelle se calcule en intégrant la distribution conditionnelle

Exercice 2

1. La loi de p variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ est une variable de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$. Cette propriété est bien connue et se démontre aisément avec les fonctions génératrices. En effet, la fonction génératrice d'une v.a. de Poisson de paramètre λ est donnée par

$$\mathbb{E}\left[z^X\right]=\mathrm{e}^{-\lambda+z \lambda}$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}\left[z^{X_1+\cdots+X_p}\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{p} z^{X_i}\right]=\prod_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[z^{X_i}\right]=\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i+z \sum_{i=1}^{p} \lambda_i} .$$

2. Calculons la loi jointe de $(X_1, \ldots, X_{p-1}, \sum_{i=1}^{p} X_i)$. Nous avons, pour

$s \geq \sum_{i=1}^{p-1} x_i$, avec $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, p-1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[X_1 = x_1, \ldots, X_{p-1} = x_{p-1}, \sum_{i=1}^{p} X_i = s\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_1 = x_1, \ldots, X_{p-1} = x_{p-1}, X_p = s - \sum_{i=1}^{p-1} x_i\right] \\
&= \prod_{i=1}^{p-1} \mathbb{P}\left[X_i = x_i\right] \mathbb{P}\left[X_p = s - \sum_{i=1}^{p-1} x_i\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i^{x_i}}{x_i!} \frac{\lambda_p^{s-\sum_{i=1}^{p-1} x_i}}{(s - \sum_{i=1}^{p-1} x_i)!} .
\end{aligned}$$

La loi conditionnelle est donc donnée par

$$\mathbb{P}\left[X_1 = x_1, \ldots, X_{p-1} = x_{p-1} | \sum_{i=1}^{p} X_i = s\right] = \frac{s! \prod_{i=1}^{p-1} \lambda_i^{x_i} \lambda_p^{s-\sum_{i=1}^{p-1} x_i}}{\prod_{i=1}^{p-1} x_i! (s - \sum_{i=1}^{p-1} x_i)! \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)^s}$$

3. On obtient l'espérance conditionnelle en calculant la moyenne de la loi conditionnelle.

1 Exercice 3

1. On calcule tout d'abord, pour $x \leq y$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[x \leq \min(X_1, \ldots, X_n) \leq \max(X_1, \ldots, X_n) \leq y\right] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[x \leq X_i \leq y\right] \\
&= \left(\int_x^y f(u) \mathrm{d}u\right)^2 .
\end{aligned}$$

La densité conjointe du couple $(m, M) = (\min(X_1, \ldots, X_n), \max(X_1, \ldots, X_n))$ s'en déduit immédiatement

$$p_{m,M}(x, y) = n(n-1) f(x) f(y) \left(\int_x^y f(u) \mathrm{d}u\right)^{n-1} .$$

La densité densité du maximum est donnée (en utilisant un raisonnement similaire) par

$$p_M(y) = n f(y) \left(\int_{-\infty}^{y} f(u) \mathrm{d}u\right)^{-1}$$

2. En utilisant les relations établies précédemment, on peut donc calculer la densité conditionnelle de $\min(X_1, \ldots, X_n)$ relativement à $\max(X_1, \ldots, X_n)$ et conclure.

Exercice 5

1. La densité conjointe du vecteur aléatoire (X, Y, Z) est donnée, pour $(x, y, z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par

$$g(x, y, z) = (y-x)^2 \mathrm{e}^{-(y-x)(z+1)} \mathbb{1}_{\{y>x\}} \mathbb{1}_{\{z>0\}} \, .$$

2. Pour calculer la loi marginale de z, il faut intégrer par rapport aux variables (x, y)

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^1 \int_0^\infty g(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_x^\infty (y-x)^2 \mathrm{e}^{-(y-x)(z+1)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty u^2 \mathrm{e}^{-u(z+1)} \mathrm{d}u \mathrm{d}x \qquad &= \frac{1}{(z+1)^2} \end{aligned}$$

3. la loi conditionnelle du couple (X, Y) relativement à Z admet pour densité

$$f_{(X,Y)|Z}(x, y|z) = (y-x)^2 \mathrm{e}^{-(y-x)(z+1)} (z+1)^2 \mathbb{1}_{\{y>x\}} \mathbb{1}_{\{z>0\}}$$

4. On calcule $\mathbb{E}\left[\sqrt{Y-X} \middle| Z\right]$ en intégrant cette loi conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sqrt{Y-X} \middle| Z = z\right] &= (z+1)^2 \int_0^1 \int_x^y (y-x)^{5/2} \mathrm{e}^{-(y-x)(z+1)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= (z+1)^2 \int_0^\infty u^{5/2} \mathrm{e}^{-u(z+1)} \mathrm{d}u \\ &= \frac{15}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{(z+1)^{3/2}} \end{aligned}$$

5. On obtient l'espérance en intégrant l'espérance conditionnelle par rapport à Z,

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{Y-X}\right] = 3/4 \sqrt{\pi} \, .$$

6. Le calcul de la loi de (X, U, V) est une application directe de la formule du changement de variable. Le jacobien de la transformation est égal à $(y-x)$ et la densité conjointe des vecteurs (X, U, V) est donnée par

$$f_{X,U,V}(x, u, v) = u \mathrm{e}^{-u} \mathbb{1}_{\{u>0\}} \mathrm{e}^{-v} \mathbb{1}_{\{v>0\}}$$

7. Les variables (X, U, V) sont donc indépendantes.