MVA - Correction des exercices

Exercice 1 (Pseudo-inverse d'une fonction de répartition) Soit F la fonction de répartition d'une loi sur $\mathbb{R}$. On définit pour $t \in]0,1[$: $F^{-1}(t) = \inf\{x : \ F(x) \geq t\}$.

1. En tant que fonction de répartition, F est croissante et continue à droite en tout point. Par conséquent, l'ensemble $\{x : \ F(x) \geq t\}$ s'écrit $[F^{-1}(t), +\infty[$: en particulier $F^{-1}(t) \in \{x : \ F(x) \geq t\}$, on en déduit que pour tout t dans $]0,1[$, $F \circ F^{-1}(t) \geq t$. Dire que $F(F^{-1}(t)) > t$ signifie que $F(F^{-1}(t)-) = \lim_{x \to F^{-1}(t),\, x < F^{(-1)}(t)} F(x) < t < F(F^{-1}(t))$ et donc que F a un saut au point $F^{-1}(t)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \{y : \ F(y) \geq F(x)\}$. Par conséquent, x est plus grand que la borne inférieure de cet ensemble : $x \geq F^{-1}(F(x))$. Supposons que $x > F^{-1}(F(x))$. Il existe donc $h > 0$ tel que $x - h > F^{-1}(F(x))$: F étant croissante, on obtient $F(x-h) \geq F(F^{-1}(F(x))) \geq F(x)$ en utilisant la réponse à la question précdente, c'est à dire que F est constante sur $[x-h, x]$ (palier en x). En conclusion : F est strictement croissante ssi $F^{-1} \circ F = Id$ et F est continue ssi $F \circ F^{-1} = Id$. La fonction F^{-1} est la réciproque de F ssi F est strictement croissante et continue.
3. On a $X \geq F^{-1}(F(X))$ p.s. et s'il n'y a pas égalite p.s., d'après le résultat précédent, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que X prenne ses valeurs dans un palier $[a, a+h[$ avec une probabilité strictement positive. Or

   $$\mathbb{P}\{X \in [a, a+h[\} = F((a+h)-) - F(a) = 0,$$

   d'où la contradiction.
4. On a vu à la question 1) que pour tout t dans $]0,1[$, $\{x : F(x) \geq t\} = \{x : x \geq F^{-1}(t)\}$, par suite $\mathbb{P}[F(X) \in [a,b[] = \mathbb{P}[X \in [F^{-1}(a), F^{-1}(b)[]$. Si la fonction de répartition F de la v.a. X est continue, cette dernière probabilité vaut exactement $F(F^{-1}(b)) - F(F^{-1}(a)) = b - a$. On en déduit donc que $F(X)$ est uniformément distribuée sur $[0,1]$, et que pour tout entier n, $\mathbb{E}[(F(X))^n] = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
5. Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$, alors $\mathbb{P}[F^{-1}(U) \in]a,b]] = \mathbb{P}[U \in]F(a), F(b)]] = F(b) - F(a)$, donc $F^{-1}(U)$ suit la loi $F(dx)$.

Exercice 2 (Loi log-normale) Notons F_X la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[\log X \leq \log x] = \mathbb{P}[Y \leq \log x] = F_Y(\log x),$$

avec Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On trouve la densité de la loi de X en dérivant cette fonction par rapport à x, soit $f_X(x) = \frac{1}{x} g_{\mu,\sigma^2}(\log x) \mathbf{1}_{x>0}$, en notant g_{μ,σ^2} la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 3 (loi $\chi^2(1)$) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors pour tout $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = \mathbb{P}[X^2 \leq x] = \mathbb{P}[X \leq \sqrt{x}]$, on en déduit comme ci-dessous que la densité de la loi de X^2 est

$$f_{X^2}(x) = \frac{g_{0,1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X^{-1} - \lfloor X^{-1} \rfloor \leq t] &= \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N}^*; n \leq X^{-1} \leq n+t] = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\frac{1}{n+t}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx \\
&= \log 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\log(1+\frac{1}{n}) - \log(1+\frac{1}{n+t})) = \log 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \log \frac{(n+1)(n+t)}{n(n+t+1))}.
\end{aligned}$$

Les termes s'annulent 2 à 2, il ne reste finalement que $\mathbb{P}[X^{-1} - \lfloor X^{-1} \rfloor \leq t] = \log(2)\log(1+t)$. La v.a. $X^{-1} - \lfloor X^{-1} \rfloor$ a donc la même loi que X.

Exercice 5 (Ordre stochastique)

1. Prendre par exemple deux lois gaussiennes de même variance et de moyennes différentes. Dans ce cas particulier, les fonctions de répartition F et G sont translatées l'une de l'autre sur $\mathbb{R}$.
2. Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$, et $X = F^{-1}(U)$, $Y = G^{-1}(U)$. On a vu à l'exercice 1 que X et Y suivent respectivement les lois $F(dx)$ et $G(dx)$. Par ailleurs, pour tout a réel, on sait que : $G(a) \geq F(a)$, on a donc avec probabilité 1,

   $$\{a \in \mathbb{R} : \ F(a) \geq U\} \subset \{a \in \mathbb{R} : \ G(a) \geq U\},$$

   on en déduit que $G^{-1}(U) \leq F^{-1}(U)$ presque sûrement.
3. Prendre par exemple deux variables aléatoires indépendantes, gaussiennes de même variance et de moyennes différentes.
4. Supposons que $G \leq_{sto} F$ et que (X,Y) soit un couplage de (F,G). On a vu qu'on pouvait construire deux v.a. X' et Y' qui soient également un couplage de (F,G) et telles que $Y' \leq X'$ presque sûrement. Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a donc $f(Y') \leq f(X')$, puis $\mathbb{E}[f(Y')] \leq \mathbb{E}[f(X')]$. Ces valeurs ne dépendant que des lois de X' et Y', cette inégalité est également vraie pour X et Y.

Exercice 6 (Fonction génératrice) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ indépendante des X_i. On désigne par $f(z) = \mathbb{E}[z^N]$ la fonction génératrice de N et par g celle des X_i.
Soit $S = \sum_{i=1}^N X_i$, alors la fonction génératrice de S vaut

$$g_S(z) = \mathbb{E}[z^S] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[N=k]\mathbb{E}[z^{\sum_{i=1}^k X_i}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[N=k] g(z)^k = f(g(z)).$$

Exercice 7 (Loi exponentielle) Supposons que X est une v.a. de loi exponentielle de paramètre μ (densité $\mu e^{-\mu x}\mathbb{I}_{x\geq 0}$) et Y une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ. Alors

$$\mathbb{P}[X \leq Y] = \int_0^{+\infty}\int_0^y \mu e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy = \int_0^{+\infty}(1-e^{-\mu y})\lambda e^{-\lambda y}dy = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \leq \alpha \text{ et } X \leq Y] &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\min(y,\alpha)} \mu e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy \\
&= \int_0^{\alpha}\int_0^{y} \mu e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy + \int_\alpha^{+\infty}\int_0^{\alpha} \mu e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy \\
&= \int_0^{\alpha}(1-e^{-\mu y})\lambda e^{-\lambda y}dy + \int_\alpha^{+\infty}(1-e^{-\mu\alpha})\lambda e^{-\lambda y}dy \\
&= 1-e^{-\lambda\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)\alpha}) + e^{-\lambda\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)\alpha} \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)\alpha}).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathbb{P}[X \leq \alpha / X \leq Y] = \frac{\mathbb{P}[X\leq\alpha \text{ et } X\leq Y]}{\mathbb{P}[X\leq Y]} = 1-e^{-(\lambda+\mu)\alpha}$, la densité de X conditionnelle à l'événement $\{X \leq Y\}$ est donc $x \mapsto (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}$.

Les densités de $Y-X$ et (X,Y) conditionnelles à l'événement $\{X \leq Y\}$ se calculent de la même manière. On trouve $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ pour la densité de $Y-X$ conditionnelle à $\{X \leq Y\}$.

Exercice 8 (Loi de Cauchy) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout ensemble E mesurable, en posant $f = \mathbb{I}_E$, on a

$$\mathbb{E}[f(X/Y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{y})e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{y})e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{(ty)^2+y^2}{2}}ydtdy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(ty)^2+y^2}{2}}ydydt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

On en déduit que la densité de X/Y est $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

Supposons maintenant que X et Y sont distribués selon cette nouvelle loi, dans ce cas

$$\mathbb{E}[f(X/Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)\frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dxdy$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)\frac{1}{\pi(1+x^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dxdy = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\frac{1}{\pi(1+(ty)^2)}\frac{1}{\pi(1+y^2)}ydydt.$$

Or $\frac{1}{(1+(ty)^2)}\frac{1}{(1+y^2)} = \frac{1}{t^2-1}\left(\frac{t^2}{(1+(ty)^2)} - \frac{1}{(1+(y)^2)}\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X/Y)] &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2y}{\pi(1+(ty)^2)} - \frac{y}{\pi(1+(y)^2)}\right)dydt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{\pi(t^2-1)}\log(t^2)dt.
\end{aligned}$$

On en déduit que la densité de X/Y est $\frac{\log(t^2)}{\pi(t^2-1)}$.

Exercice 9 (Loi gamma) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(a+b,\lambda)$ et $\beta(a,b)$. On veut montrer que $Z = XY$ et $T = X(1-Y)$ sont indépendantes. Si l'on note f et g les densités respectives des lois $\gamma(a+b,\lambda)$ et $\beta(a,b)$, alors pour toute fonction h mesurable (pour laquelle l'intégrale a un sens)

$$\mathbb{E}[h(Z,T)] = \int\int h(xy, x(1-y))f(x)g(y)dxdy.$$

Considérons le changement de variables $z = xy$ et $t = x(1-y)$, on a $x = z+t$ et $y = z/(z+t)$, et le Jacobien correspondant est $\frac{1}{z+t}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[h(Z,T)] = \int\int h(z,t)\frac{1}{z+t}f(z+t)g(z/(z+t))dzdt.$$

Si on développe l'expression de la loi jointe de (Z,T), on obtient

$$\frac{1}{z+t}\frac{1}{\Gamma(a+b)}\lambda^{a+b}e^{-\lambda(z+t)}(z+t)^{a+b-1}\mathbb{I}_{\{z+t>0\}}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(z/(z+t))^{a-1}(1-z/(z+t))^{b-1}\mathbb{I}_{\{z/(z+t)\in]0,1[\}}$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda z}z^{a-1}\mathbb{I}_{\{z>0\}}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}e^{-\lambda t}t^{b-1}\mathbb{I}_{\{t>0\}},$$

qui est le produit séparable d'une fonction de t et d'une fonction de z. Par suite, les v.a. Z et T sont indépendantes de lois respectives $\gamma(a,\lambda)$ et $\gamma(b,\lambda)$.

Exercice 10 La loi de la distance euclidienne entre $M(X)$ et $M(Y)$ est la même que celle de la distance D entre $M(X)$ et un point fixe du cercle, par exemple $M(0)$. La distance entre $M(\theta)$ et $M(0)$ vaut $2\sin(\theta/2)$, donc si X est distribué uniformément sur le $[0,2\pi]$, on peut écrire

$$\mathbb{P}[D \leq d] = \mathbb{P}[2\sin\frac{X}{2} \leq d] = \mathbb{P}[X/2 \leq Arcsin(d/2) \text{ ou } X/2 \geq \pi - Arcsin(d/2)] = \frac{2}{\pi}Arcsin(d/2).$$

Par suite, la loi de D peut s'écrire $f_D(d) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-(d/2)^2}}$.

Exercice 11 (Convolution) Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs réelles de lois respectives F et G. On désigne par $F * G$ la loi de $X+Y$ (produit de convolution).

1. Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}[X+Y=n] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[X=k]\mathbb{P}[Y=n-k]$$
2. Supposons que F a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, alors pour tout ensemble E mesurable, en posant $h = \mathbf{1}_E$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X+Y)] = \int\int h(x+y)f(x)dxG(dy) &= \int \left(\int h(z)f(z-y)dz\right) G(dy) \\ &= \int h(z)\left(\int f(z-y)G(dy)\right) dz,\end{aligned}$$
où l'inversion des intégrales est légitime car toutes les fonctions sont positives. Ceci est vrai pour tout ensemble mesurable E, donc $X+Y$ a aussi une loi à densité et sa densité est $z \mapsto \int f(z-y)G(dy)$.
3. On pourra vérifier que $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
4. La transformée de Laplace de la loi $\gamma(a, \lambda)$ s'écrit
$$\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a \int_0^{+\infty} e^{-(t+\lambda)x}x^{a-1}dx = \frac{(t+\lambda)^a}{\lambda^a} = \left(\frac{t}{\lambda}+1\right)^a.$$
Ainsi, si $X \sim \gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \gamma(b, \lambda)$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{t(X)}]\mathbb{E}[e^{t(Y)}] = \left(\frac{t}{\lambda}+1\right)^{a+b}$. Comme la transformée de Laplace détermine entièrement la loi de $X+Y$, on en déduit que $\gamma(a, \lambda) * \gamma(b, \lambda) = \gamma(a+b, \lambda)$.
5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On a vu à l'exercice 3 que X_1^2 a une loi de densité
$$f_{X_1^2}(x) = \frac{g_{0,1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{x\geq 0},$$
donc X_1^2 a pour loi $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. D'après la question précédente, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, $\sum_{i\leq n} X_i^2$ a pour loi $\gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Cette loi est aussi appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté.

Exercice 12 (Projection orthogonale dans L_2) Soient X at Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable.

1. En dérivant la fonction $m \mapsto \mathbb{E}[(Y-m)^2]$, on montre que la constante m^* qui minimise cette expression est forcément $\mathbb{E}[Y]$.
2. On cherche le minimum en (a, b) de l'expression $\mathbb{E}[(aX+b-Y)^2]$. Or, en dérivant cette expression par rapport à a et b, on obtient le système
$$\mathbb{E}[X(aX+b-Y)] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[aX+b-Y] = 0,$$
d'où
$$a = a\mathbb{E}[X^2] + b\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[XY] = 0 \text{ et } a\mathbb{E}[X] + b - \mathbb{E}[Y] = 0.$$
On en déduit que
$$a = \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{Var(X)} \text{ et } b = \frac{\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[XY]}{Var(X)}.$$