MVA - Correction des Exercices

Exercice 1 (Problème - la "Martingale classique") 1. La variable τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt : $\forall n \geq 1$, $\{\tau = n\} = \{U_1 = 0, \ \ldots, \ U_{n-1} = 0, \ U_n = +1\} \in \mathcal{F}_n$. Elle suit une loi géométrique : $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\{\tau = n\} = (1/2)^n$. Ce temps d'arrêt est fini presque-sûrement : $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = \sum_{k=1}^{+\infty}(1/2)^k = 1$. A l'instant n, s'il n'y a pas encore eu de Pile, le joueur a perdu toutes ses mises : son capital est de $Y_n = -S_1 - \ldots - S_n = -\sum_{k=1}^n 2^k = -2^{n+1} + 2$. Lorsque le premier Pile sort, au temps $n = \tau$, il reçoit $S_n = 2^n$ et son capital est alors : $Y_n = Y_{n-1} + 2^n = 2$. L'idée est que si l'on joue assez longtemps (*i.e.* jusqu'au temps aléatoire τ), on pourra toujours couvrir ses dettes et atteindre un capital de 2 euros.

2. On a : $\forall n \geq 1$, $S_n = 2^n \mathbb{I}\{\tau > n-1\}$. Or, τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, la variable S_n est donc $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, le processus (S_n) est $\mathcal{F}$-prévisible.

3. Pour $n \leq \tau$, on a : $Y_n - Y_{n-1} = (2U_n - 1)2^n$. Ainsi : $\forall n \geq 1$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n\wedge\tau} 2^k(2U_k - 1)$. Or le processus défini par $M_n = \sum_{k=1}^n 2^k(2U_k - 1) = M_{n-1} + 2^n(2U_n - 1)$ est une $\mathcal{F}$-martingale : $\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} + 2^n(2\mathbb{E}[U_n] - 1) = M_{n-1}$ car U_n est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$ et d'espérance égale à $1/2$. Le processus (Y_n) est donc une $\mathcal{F}$-martingale, égale à la martingale (M_n) arrêtée au $\mathcal{F}$-temps d'arrêt p.s. fini τ : $\forall n \geq 1$, $Y_n = M_{n\wedge\tau}$.

4. On a, pour tout $n \geq 1$, $Y_n^2 = M_{n\wedge\tau}^2$, et la v.a. M_n^2 est intégrable (car bornée). Le compensateur de (Y_n^2) est égal au compensateur de la sous-martingale M_n^2 arrêté au temps τ. Or $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n 4^k = (4/3)(4^n - 1)$. Donc $\langle Y \rangle_n = \langle M \rangle_{n\wedge\tau} = (4/3)(4^{n\wedge\tau} - 1)$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle Y \rangle_n] &= \frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} 4^k \mathbb{P}\{\tau = k\} + 4^n \mathbb{P}\{\tau \geq n\} - 1\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} 4^k (1/2)^k + 4^n (1/2)^{n-1} - 1\right) \\
&= 4\left(2^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[\langle Y \rangle_n]$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. En vertu de la décomposition de Doob-Meyer, l'espérance $\mathbb{E}[Y_n^2]$ est égale à $\mathbb{E}[\langle Y \rangle_n]$, la suite (Y_n) ne converge donc pas dans L_2.

5. On a $Y_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $Y_n = 2\mathbb{I}\{n \geq \tau\} + (2 - 2^{n+1})\mathbb{I}\{n < \tau\} = 2 - 2^{n+1}\mathbb{I}\{n < \tau\}$. Donc : $\mathbb{P}\{Y_n = 2\} = \mathbb{P}\{n \geq \tau\} = \sum_{k=1}^n (1/2)^k = 1 - (1/2)^n$ et $\mathbb{P}\{Y_n = 2 - 2^{n+1}\} = (1/2)^n$. Puisque τ est fini presque-sûrement, Y_n tend vers 2 avec probabilité 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Si (Y_n) converge dans L_1, c'est nécessairement vers sa limite presque-sûre : 2. Or, puisque (Y_n) est une martingale, on a $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_0] = 0 \neq 2$, il n'y a donc pas convergence dans L_1.

7. On pose $L = 2^k$ pour un certain $k \geq 1$ fixé.
   (a) Soit $\widetilde{\tau} = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ Y_n - 2^{n+1} < -L\}$. Le processus (Y_n) étant $\mathcal{F}$-adapté, la v.a. $\widetilde{\tau}$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt : c'est le temps d'entrée de (Y_n) dans $\{\dots, \ -L + 2^{n+1} - 2, \ -L + 2^{n+1} - 1\}$. Le jeu s'arrête à l'instant $N = \tau \wedge \widetilde{\tau}$: $Z_n = Y_{n \wedge N}$. On remarque également que l'on peut écrire $N = \tau \wedge (k-1)$: $k-1$ est le plus grand entier l tel que $-S_1 \dots - S_l - 2^{l+1} < -L$ (cela correspond à la plus longue série d'échecs successifs autorisée). La v.a. N est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt en tant que minimum de deux $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. De plus, pour tout $n \in \{1, \dots, k-2\}$, on a :

   $$\mathbb{P}\{N = n\} = \mathbb{P}\{\tau = n\} = (1/2)^n \text{ et } \mathbb{P}\{N = k-1\} = \mathbb{P}\{\tau \geq k-1\} = 1/2^{k-1}.$$

   (b) La suite (Z_n) est obtenue en arrêtant la $\mathcal{F}$-martingale (Y_n) au $\mathcal{F}$-temps d'arrêt N, c'est donc encore une $\mathcal{F}$-martingale.
   (c) On a $Z_n = M_{n \wedge N}$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $N \leq \tau$ est p.s. fini, Z_n converge p.s. vers $M_N = M_{\tau \wedge (k-1)}$. La suite (Z_n) est bornée : elle prend ses valeurs dans $\{-L, \ \dots, \ 2\}$, il y a donc convergence dans L_1 par convergence dominée.

Exercice 2 1. On montre par une récurrence évidente que pour tout $n \geq 1$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et de carré intégrable. De plus : $\forall n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 2X_{n-1}\mathbb{E}[U_n] = X_{n-1} \text{ p.s.}$$

2. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 \mathbb{E}[(2U_k - 1)^2] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2. \end{aligned}$$

   De plus, $X_n = 2^n U_1 \times \dots \times U_n$, on a donc : $\mathbb{E}[X_n^2] = 2^{2n}\left(\mathbb{E}[U_1^2]\right)^n = (4/3)^n$. Ainsi : $\mathbb{E}[\langle X \rangle_n] = (1/3)\sum_{k=1}^{n}(4/3)^{k-1} = (4/3)^n - 1 \nearrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. En vertu de la décomposition de Doob-Meyer de la sous-martingale (X_n^2), la suite (X_n) n'est donc pas bornée dans L_2 ($\mathbb{E}[X_n^2]$ est égale à $\mathbb{E}[\langle X \rangle_n]$ à une constante additive près), elle ne converge donc pas dans L_2.
3. On a $X_n \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}[X_n] = 2^n\left(\mathbb{E}[U_1]\right)^n = 1$. Ainsi, $\sup_n \mathbb{E}[X_n] < +\infty$, la suite (X_n) converge donc p.s. vers une v.a. X_∞ intégrable.
4. On a, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \log(X_n) = n\log 2 + \sum_{k=1}^{n}\log U_k$. En vertu de la loi forte des grands nombres appliquée à la suite i.i.d. de v.a. intégrables (U_k), on a : $Y_n/n \to \log 2 + \int_0^1 \log(u)du = -1 + \log 2$. On en déduit que $X_n \sim \exp(-(1 - \log 2)n) \to 0$ p.s. lorsque $n \to +\infty$.
5. La suite (X_n) ne converge pas dans L_1. En effet, si c'était le cas, sa limite serait 0, sa limite presque-sûre, ce qui contredit le fait que $\mathbb{E}[X_n] = +1$.

Exercice 3 1. Par une récurrence évidente, on montre que pour tout $n \geq 1$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et de carré intégrable. Par ailleurs : $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n \mathbb{E}[\xi_n] = X_n$ p.s.

2. On a $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = 1$.
3. On a $X_n \geq 0$ p.s. et $\sup_n \mathbb{E}[X_n] < +\infty$, la suite (X_n) converge donc p.s. vers une v.a. X_∞ intégrable.
4. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}^2] &= (1-\lambda)^2\mathbb{E}[X_n^2] + 2\lambda^2\mathbb{E}[X_n^2] + 2\lambda(1-\lambda)\mathbb{E}[X_n^2] \\ &= \left(\lambda^2+1\right)\mathbb{E}[X_n^2].\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathbb{E}[X_n^2] = (\lambda^2+1)^n$. Ainsi pour tout $\lambda > 0$, on obtient que la suite (X_n) n'est pas bornée dans L_2 et donc ne converge pas.
5. On a, pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{aligned}\langle X\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 X_{k-1}^2 \mathbb{E}[(\xi_k - 1)^2] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 X_{k-1}^2\end{aligned}$$
6. On suppose désormais $\lambda = 1$.
   (a) On a $\mathbb{P}\{X_n = 2^n\} = (1/2)^n = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 0\}$.
   (b) D'après la question précédente, X_n converge vers 0 en probabilité, sa limite p.s. est donc aussi égale à 0.
   (c) On a $X_n \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout n. La suite ne peut converger dans L_1 car la limite serait nécéssairement 0. Les (X_n) ne sont pas uniformément intégrables (cela impliquerait la convergence dans L_1).