MVA - Correction

Exercice 1

1. Pour tout $n \geq 1$, Z_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable (somme et produit de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurables) et l'on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_{n-1}\sigma^2 + (Z_{n-1}\mu)^2]\right]. \end{aligned}$$
Par récurrence, on obtient immédiatement que $Z_n \in L_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que le processus X défini par $X_n = Z_n/\mu^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est $\mathcal{F}$-adapté et de carré intégrable. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{I}\{Z_n > 0\} \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n+1} \mid Z_n] \\ &= \mathbb{I}\{Z_n > 0\} Z_n \mu = Z_n \mu, \end{aligned}$$
et donc $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$. Le processus X est donc une martingale de carré intégrable.
2. Puisque X est une martingale, son espérance est constante : $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = 1$, soit $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$. En vertu de l'inégalité de Chebyshev, on obtient :
$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}\{Z_n = 0\} &= \mathbb{P}\{Z_n > 0\} \\ &= \mathbb{P}\{Z_n \geq 1\} \\ &\leq \mathbb{E}[Z_n] = \mu^n \to 0, \end{aligned}$$
car $\mu < 1$.
3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1] \mapsto p_k s^k$ est croissante et convexe. Par passage à la limite, on obtient que ϕ est également croissante et convexe. Plus précisément, on montre par convergence dominée ("dérivation sous l'espérance") que $\phi'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k s^{k-1} \geq 0$ et $\phi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \geq 0$. La fonction ϕ est en fait strictement croissante et strictement convexe sur $]0,1]$. On observe aussi que $p_0 < 1$ (car sinon on aurait $\mu = 0$) et que $p_1 < 1$: en effet, si $p_k = 0$ pour $k \geq 2$, on aurait $\mu = p_1 \leq 1$. En conséquence, $\exists k \geq 2$ tel que $p_k > 0$ et donc $p_1 < 1$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour $m \geq 1$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z_m = 0 \mid Z_1 = k\} &= \mathbb{P}\{Z_m = 0,\ Z_{m-1} = 0 \mid Z_1 = k\} \\ &+ \mathbb{P}\{Z_m = 0,\ Z_{m-1} > 0 \mid Z_1 = k\} \\ &= \mathbb{P}\{Z_{m-1} = 0 \mid Z_1 = k\} \\ &+ \mathbb{E}\left[\mathbb{I}\{Z_{m-1} > 0\}\mathbb{E}[\mathbb{I}\{Z_m = 0\} \mid Z_{m-1}] \mid Z_1 = k\right] \end{aligned}$$
Sachant qu'à l'instant 1, il y a k individus dont la descendance évolue de façon indépendante. L'événement $\{Z_m = 0\}$ signifie qu'à l'instant m, les k lignées sont éteintes, or chacun de ces événements se produit avec la probabilité $\mathbb{P}\{Z_m = 0 \mid Z_1 = 1\} = \mathbb{P}\{Z_{m-1} = 0 \mid Z_0 = 1\} = \theta_{m-1}$, la probabilité de l'intersection de ces événements (indépendants) est alors le produit de ces probabilités, soit θ_m^{k-1}. On a de plus : $\theta_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Z_m = 0 \mid Z_1 = k\}\mathbb{P}\{Z_1 = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{m-1}^k p_k = \phi(\theta_{m-1})$.

(c) On remarque que $\phi(1) = 1$, $\phi'(1) = \mathbb{E}[\xi] = \mu$, $\phi(0) = p_0 \geq 0$ et $\phi'(0) = p_1 < 1$. La fonction $\psi(s) = \phi(s) - s$ est donc telle que $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) = \mu - 1 > 0$, $\psi(0) \geq 0$ et $\psi'(0) < 0$. Puisque la fonction ψ est strictement convexe sur $]0, 1]$, elle admet un unique minimum en $s_0 \in]0, 1[$: elle s'annule donc exactement deux fois, une fois en $\rho \in [0, s_0[$ et une fois en 1.

(d) On a $\theta_0 = 0$. Si $p_0 = 0$, on a $\theta_m = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On a aussi $\rho = 0$ en vertu du raisonnement précédent. Si $p_0 > 0$, on a $\theta_1 = p_0 > 0$ et $\rho > 0$, donc $\phi(\rho) = \rho > \phi(0) = p_0$. Ainsi, $0 < \theta_1 < \rho$ et par récurrence, on montre de cette façon que la suite (θ_m) est croissante à valeurs dans $]0, \rho[$, elle converge donc, et sa limite est un point fixe de ϕ, c'est donc nécéssairement ρ. Par ailleurs, puisque $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_m = 0\}$ pour tout $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}\{\forall n \in \mathbb{N} : \ Z_n = 0\} &= \mathbb{P}\{\exists n \in \mathbb{N} : \ Z_n = 0\} \\ &= \mathbb{P}\{\cup_{n\in\mathbb{N}}\{Z_n = 0\}\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Z_n = 0\} = \rho < 1. \end{aligned}$$

4. On considère les variables recentrées $\zeta_{i,n} = \xi_{i,n} - \mu$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n - \mu Z_{n-1} = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \zeta_{i,n}.$$

Par indépendance des $\zeta_{i,n}$, on obtient :

$$\mathbb{E}[(Z_n - \mu Z_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \quad = \quad Z_{n-1}\sigma^2,$$

soit

$$\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}\sigma^2/\mu^{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_n &= \sigma^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{X_{m-1}}{\mu^{m+1}}, \\ \langle X \rangle_\infty &= \lim_{n\to\infty} \langle X \rangle_n = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m-1}}{\mu^{m+1}}. \end{aligned}$$

5. Le processus X est une martingale, d'espérance constante égale à 1, on a donc :

$$\mathbb{E}[\langle X \rangle_\infty] = \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{m+1}} = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu - 1)} < \infty.$$

On a donc $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$, il s'ensuit que X_n converge dans L_2 vers une v.a. X_∞. L'espace L_2 étant continûment inclus dans L_1, la convergence a aussi lieu dans L_1 et en particulier : $1 = \mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X_\infty]$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2

1. On observe tout d'abord que pour tout $n \geq 0$, les v.a. F_n^+ et F_n^- sont $\mathcal{F}_n$-mesurables, positives et majorées par la v.a. intégrable $|F_n|$. Les suites (F_n^+) et (F_n^-) sont donc deux suites positives $\mathcal{F}$-adaptées de L_1. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[F_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n] \geq \max\{\mathbb{E}[F_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], \ 0\} = \max\{F_n, \ 0\} = F_n^+,$$

(F_n^+) est donc une sous-martingale. On montre de la même façon que (F_n^-) est également une sous-martingale.

2. On observe que :
$$A_n - B_n = F_n - M_n + B_n.$$
Le processus $(A_n - B_n)$ est donc une $\mathcal{F}$-martingale, il est également $\mathcal{F}$-prévisible. Il est donc presque-sûrement constant, égal à $A_0 - B_0 = 0$. En effet : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A_n - B_n = \mathbb{E}[A_{n+1} - B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = A_{n+1} - B_{n+1}.$$
3. La suite (A_n) est le compensateur d'une sous-martingale, elle est donc presque-sûrement croissante. Elle est positive, elle converge donc avec probabilité 1 dans $[0, +\infty]$. On pose $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$. Par limite croissante, on a $\mathbb{E}[A_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_n]$. Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[A_n] \leq \sup_k \mathbb{E}[|F_k|] - \mathbb{E}[M_0] < \infty.$$
On obtient ainsi que $\mathbb{E}[A_\infty] < \infty$, la v.a. A_∞ est donc finie p.s. car intégrable et $\mathbb{E}[|A_\infty - A_n|] = \mathbb{E}[A_\infty] - \mathbb{E}[A_n] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
4. Le processus $(\mathbb{E}[A_n \mid \mathcal{F}_n])$ est une martingale régulière, $(F_n^\oplus)$ et $(F_n^\ominus)$ sont sont deux martingales (en tant que sommes de $\mathcal{F}$-martingales). Par ailleurs, $F_n^\oplus = F_n^+ + \mathbb{E}[A_\infty - A_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$ (car $A_n \leq A_\infty$). On montre de la même façon que $F_n^\ominus \geq 0$.
5. On a $F_n^\oplus - F_n^\ominus = M_n - N_n = F_n^+ - F_n^- = F_n$ car $A_n = B_n$.

1 Exercice 3

1. Les processus S_n et V_n sont $\mathcal{F}$-adaptés, intégrables et on vérifie aisément la propriété de martingales (on se réfèrera à la partie du cours sur les marches aléatoires).
2. On suppose $\sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2 < \infty$: la suite croissante A_n est majorée, elle converge vers $A_\infty = \sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2$. Puisque V_n est une martingale, on a $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[S_n^2] \leq \mathbb{E}[V_1^2] + \sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2 < \infty$. La suite S_n converge donc dans L_2 et p.s. .
3. (a) En vertu du théorème d'arrêt, on a : $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[V_{n\wedge\tau_a}] = \mathbb{E}[V_0] = 0$, soit $\mathbb{E}[S^2_{n\wedge\tau_a}] = \mathbb{E}[A_{n\wedge\tau_a}]$.
   (b) Puisque la suite S_n converge p.s., elle est p.s. bornée. L'univers des possibles s'écrit
   $$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\tau_k = +\infty\} = \limsup_k \{\tau_k = +\infty\}.$$
   En particulier, il existe donc nécessairement un entier k tel que $\mathbb{P}\{\tau_k = +\infty\} > 0$.
   (c) D'après la question précédente, on peut choisir $a > 0$ tel que $\mathbb{P}\{\tau_a = +\infty\} > 0$. Sur $\{\tau_a > n\}$, on a $|S_{n\wedge\tau_a}| \leq a$ et sur $\{\tau_a \leq n\}$, on a $|S_{n\wedge\tau_a}| = |S_{\tau_a}| \leq |S_{\tau_a - 1}| + |X_{\tau_a}| \leq a + M$. En vertu de la question 3(a), on a donc
   $$\mathbb{E}[A_{n\wedge\tau_a}] \leq (M+a)^2,$$
   ce qui implique que $(M+a)^2 \geq \mathbb{E}[\mathbb{I}\{\tau_a = \infty\} A_{n\wedge\tau_a}] = \mathbb{E}[\mathbb{I}\{\tau_a = \infty\} A_n] = A_n \mathbb{P}\{\tau_a = \infty\}$. On en déduit que la suite croissante A_n est majorée :
   $$A_n \leq \frac{(M+a)^2}{\mathbb{P}\{\tau_a = \infty\}}.$$
   Elle converge donc.

Exercice 4

1. Puisque ν est p.s. finie, la suite $|X_\nu| \mathbb{I}\{\nu > n\}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Elle est par ailleurs dominée par la v.a. intégrable $|X_\nu|$. En vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\mathbb{E}[|X_\nu| \mathbb{I}\{\nu > n\}] \to 0$.

2. On remarque que $|X_{n\wedge\nu} - X_\nu| = |X_n - X_\nu|\mathbb{I}\{n < \nu\} \leq |X_\nu|\mathbb{I}\{n < \nu\} + |X_n|\mathbb{I}\{n < \nu\}$. On obtient le résultat en passant à l'espérance. En effet, par hypothèse, $\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}\{n < \nu\}] \to 0$ et le fait que $\mathbb{E}[|X_\nu|\mathbb{I}\{n < \nu\}] \to 0$ résulte du théorème de convergence dominée.

3. D'après le théorème d'arrêt,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0] &= \mathbb{E}[X_{n\wedge\nu}] \\ &= \mathbb{E}[X_{n\wedge\nu} - X_\nu] + \mathbb{E}[X_\nu]. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le résultat de la question précédente.