MVA - Exercices

Notations

- L'univers des possibles est noté Ω et $\mathbb{P}\{\mathcal{E}\}$ désigne la probabilité que l'événement mesurable $\mathcal{E} \subset \Omega$ soit réalisé
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance d'une variable aléatoire X intégrable (ou mesurable et positive)
- La variance d'une variable aléatoire X de carré intégrable est notée $var(X)$
- $\mathbb{I}\{\mathcal{E}\}$ désigne la fonction indicatrice associée à l'événement $\mathcal{E}$
- L'espace des variables intégrables est noté L_1, celui des variables de carré intégrable est noté L_2
- Le minimum de deux réels a et b est noté $a \wedge b$.

Exercice 1 (Processus de Galton-Watson)

On modélise l'évolution d'une population en temps discret de la façon suivante. Initialement, à l'instant $n = 0$, la population compte $Z_0 = 1$ individu. Après sa naissance, chaque individu i donne naissance à chaque instant n à un nombre aléatoire $\xi_{i,n}$ d'individus, indépendemment et avec la même loi que les autres individus. Le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrivant les effectifs de chaque génération peut donc être défini à partir d'une collection de variables indépendantes identiquement distribuées et de carré intégrable $\{\xi_{i,n} :\ (i, n) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ par la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} = (\xi_{1,n+1} + \cdots + \xi_{Z_n,n+1})\,\mathbb{I}\{Z_n > 0\}.$$

On définit la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ est la tribu grossière et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_{i,m} :\ i \geq 1, n \geq m \geq 1)$ la tribu engendrée par les variables $\{\xi_{i,m} :\ i \geq 1, n \geq m \geq 1\}$.
On pose $p_k = \mathbb{P}\{\xi_{i,n} = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\mu = \mathbb{E}[\xi_{i,n}]$ et $\sigma^2 = var(\xi_{i,n})$. On suppose $\mu > 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = Z_n/\mu^n$. Montrer que le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.
2. Montrer que si $\mu < 1$, alors $\mathbb{P}\{Z_n = 0\}$ converge vers 1 lorsque $n \to \infty$. En déduire que X_n converge presque-sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3. On suppose $\mu > 1$. Soit $\phi(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_{i,n}}] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ la fonction génératrice de la distribution $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ du nombre d'enfants d'un individu.
   (a) Montrer que Φ est croissante et convexe sur $[0, 1]$.
   (b) On pose $\theta_m = \mathbb{P}\{Z_m = 0\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\{Z_m = 0 \mid Z_1 = k\} = \theta_{m-1}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\theta_m = \phi(\theta_{m-1})$.
   (c) Montrer que ϕ admet un unique point fixe ρ sur $[0, 1[$ (on remarquera que $\phi(1) = 1$ et $\phi'(1) = \mu$).
   (d) Montrer que $\theta_m \nearrow \rho$ lorsque $m \to \infty$. En déduire que la probabilité de *non-extinction* de la population peut s'exprimer de la façon suivante : $\mathbb{P}\{\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n > 0\} = 1 - \rho > 0$.
4. Calculer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ de la martingale de carré intégrable (X_n), *i.e.* le compensateur de la sous-martingale (X_n^2). Déterminer $\langle X\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty}\langle X\rangle_n$ et calculer $\mathbb{E}[\langle X\rangle_\infty]$.
5. Montrer que $X = (X_n)$ converge dans L_2 vers une variable X_∞ d'espérance égale à 1.

Exercice 2 (Décomposition de Krickeberg)

Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(F_n)_{n\geq 0}$ une $\mathcal{F}$-martingale bornée dans L_1. On note $F_n^+ = \max(F_n, 0)$ et $F_n^- = -\min(F_n, 0)$.

1. Montrer que $(F_n^+)_{n\geq 0}$ et $(F_n^-)_{n\geq 0}$ sont des sous-martingales positives.
2. On note $F_n^+ = M_n + A_n$ et $F_n^- = N_n + B_n$ la décomposition de Doob-Meyer de ces deux sous-martingales (**rappel :** A_n et B_n sont des processus prévisibles, $A_0 = B_0 = 0$ et M_n et N_n sont des martingales). Montrer que $A_n = B_n$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. (**indication :** on montrera que $A_n - B_n$ est une martingale).
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe $\mathbb{P}$–presque sûrement. dans $[0, \infty]$. On note A_∞ cette limite. Montrer que $A_\infty < \infty$ et que la convergence a aussi lieu dans L_1.
4. On pose $F_n^\oplus = M_n + \mathbb{E}[A_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ et $F_n^\ominus = N_n + \mathbb{E}[A_\infty \mid \mathcal{F}_n]$. Montrer que $(F_n^\oplus)_{n\geq 0}$ et $(F_n^\ominus)_{n\geq 0}$ sont des martingales positives.
5. Montrer que $F_n = F_n^\oplus - F_n^\ominus$.

On a donc démontré un résultat dû à Krickeberg (1956). Toute martingale bornée dans L_1 est la différence de deux martingales positives.

Exercice 3

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles, de carré intégrable, adaptée à une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n^2)_{n\geq 0}$ une suite de nombres positifs. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, on a presque-sûrement :

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \sigma_n^2.$$

On pose $S_0 = 0$, $A_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + \cdots + X_n, \\ A_n &= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2, \\ V_n &= S_n^2 - A_n. \end{aligned}$$

1. Montrer que $S = (S_n)_{n\geq 0}$ et $V = (V_n)_{n\geq 0}$ sont des martingales.
2. Montrer que, si $\sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2 < +\infty$, $(S_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement et dans L_2.
3. On suppose que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement et qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq M$ presque-sûrement. Pour tout $a > 0$, on pose $\tau_a = \inf\{n \geq 0 : |S_n| > a\}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau_a}^2] = \mathbb{E}[A_{n\wedge\tau_a}]$.
   (b) En utilisant la convergence presque sûre supposée de $(S_n)_{n\geq 0}$ vers une variable finie presque-sûrement, montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}\{\tau_a = +\infty\} > 0$.
   (c) En déduire que $\sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2 < +\infty$.

Exercice 4

Soient $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une martingale et ν un temps d'arrêt fini presque-sûrement vérifiant

$$\mathbb{E}[|X_\nu|] < +\infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}\{\nu > n\}] = 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}[|X_\nu|\mathbb{I}\{\nu > n\}]$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Prouver que $\mathbb{E}[|X_{\nu\wedge n} - X_\nu|] \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[X_\nu] = \mathbb{E}[X_0]$.