MVA - Exercices - Remise à niveau Probabilité

Exercice 1 (Pseudo-inverse d'une fonction de répartition) Soit F la fonction de répartition d'une loi sur $\mathbb{R}$. On définit pour $t \in]0,1[$: $F^{-1}(t) = \inf\{x : \ F(x) \geq t\}$.

1. Montrer que : $\forall t \in]0,1[$, $F \circ F^{-1}(t) \geq t$, avec égalité si F est continue.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F^{-1} \circ F(x) \leq x$, avec égalité si F est strictement croissante.
3. Soit X une v.a. de loi $F(dx)$; prouver que $X = F^{-1}(F(X))$ presque-sûrement.
4. Montrer que si F est continue, alors $F(X)$ a une loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer $\int_{x\in\mathbb{R}} F^n(x)dF(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que, si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi $F(dx)$.

Exercice 2 (Loi log-normale) Une variable aléatoire X strictement positive presque-sûrement est dite *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) si $\log(X) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer la densité de cette loi.

Exercice 3 (loi $\boldsymbol{\chi^2(1)}$) Soit X une v.a. normale centrée réduite. Calculer la densité de la v.a. X^2.

Exercice 4 Soit X une v.a. dont la densité est $f(x) = (\log 2 \cdot (1+x))^{-1}\mathbf{1}_{x\in]0,1[}$. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la v.a. $X^{-1} - \lfloor X^{-1} \rfloor$ a la même loi que X.

Exercice 5 (Ordre stochastique) Soient X et Y deux v.a. réelles de lois respectives $F(dx)$ et $G(dx)$. On suppose que : $\forall s \in \mathbb{R}$, $F(s) \leq G(s)$. On dit alors que F est stochastiquement plus grande que G et on note $G \leq_{sto} F$.

1. Trouver un exemple de lois F et G telles que $G \leq_{sto} F$.
2. Montrer que $G \leq_{sto} F$ si et seulement si il existe une paire de variables aléatoires (X, Y) définies sur un même espace de probabilité et telles que $X \sim F(dx)$ et $Y \sim G(dx)$ (on parle alors de *couplage* des lois F et G) pour laquelle on a $Y \leq X$ presque-sûrement.
3. Trouver un exemple de lois F et G telles que $G \leq_{sto} F$ et un couplage (X, Y) tel que $\mathbb{P}(Y \leq X) < 1$.
4. Prouver que, si l'on a $G \leq_{sto} F$, alors pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[f(Y)] \leq \mathbb{E}[f(X)]$ pour tout couplage (X, Y) de (F, G).

Exercice 6 (Fonction génératrice) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ indépendante des X_i. On désigne par $f(z) = \mathbb{E}[z^N]$ la fonction génératrice de N.
Calculer la fonction génératrice de la variable $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Exercice 7 (Loi exponentielle) Soient X et Y deux variables aléatoires exponentielles et indépendantes. Calculer les densités des lois des variables X, (X,Y) et $Y-X$ conditionnelles à l'événement $\{X \leq Y\}$.

Exercice 8 (Loi de Cauchy) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la loi $F(dx)$ du quotient X/Y. Même question en supposant que X et Y sont distribuées selon la loi $F(dx)$.

Exercice 9 (Loi gamma) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(a+b,\lambda)$ et $\beta(a,b)$. Montrer que les variables XY et $X(1-Y)$ sont indépendantes et identifier leurs lois respectives.
Rappel : soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, la loi $\gamma(a,b)$ est la loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(a)} b^a e^{-bx} x^{a-1} \mathbb{I}_{\{x>0\}}$, la loi $\beta(a,b)$ est la loi de densité $x \mapsto \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}_{\{x\in]0,1[\}}$.

Exercice 10 On désigne par $M(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ le point du cercle trigonométrique associé à l'angle orienté $\theta \in [0, 2\pi[$. Soient X et Y deux variables indépendantes uniformes sur $[0,2\pi]$. Calculer la loi de la distance euclidienne entre les points $M(X)$ et $M(Y)$.

Exercice 11 (Convolution) Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs réelles de lois respectives F et G. On désigne par $F * G$ la loi de $X+Y$ (produit de convolution).

1. On suppose X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$. Expliciter la loi de $X+Y$.
2. Montrer que si F a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, alors c'est aussi le cas pour la loi de $X+Y$. Expliciter la densité de $F*G$.
3. Calculer $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
4. Calculer la transformée de Laplace de la loi $\gamma(a,\lambda)$. Calculer $\gamma(a,\lambda) * \gamma(b,\lambda)$.
5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la loi de X_1^2, en déduire la loi de $\sum_{i\leq n} X_i^2$.

Exercice 12 (Projection orthogonale dans L_2) Soient X at Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable.

1. Déterminer la constante m^* approchant le mieux la variable Y au sens des moindres carrés : $m^* = \arg\min_{m\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[(Y-m)^2]$.
2. Déterminer la fonction affine de X approchant le mieux la variable Y au sens des moindres carrés.