MVA - Exercices

Exercice 1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Déterminer la loi et l'espérance de X conditionnelles à Y dans le cas où la loi $F(dxdy)$ de (X, Y) est :

1. la loi uniforme sur le triangle $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$
2. la loi uniforme sur le carré $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$

Exercice 2 Un composant électronique est installé à l'instant $t = 0$ et tombe en panne à un instant aléatoire $T \geq 0$. On suppose que la loi de la variable aléatoire T a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue et que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(T > t) > 0$. On pose $F(t) = 1 - \bar{F}(t) = \int_{s=0}^{t} f(s)ds$ pour tout $t \geq 0$. Si à un instant $t > 0$, la panne ne s'est pas encore produite, le risque de panne instantanée se mesure par le **taux de panne** :

$$\lambda(t) = \lim_{u \to 0+} \frac{1}{u} \mathbb{P}(t < T \leq t + u \mid T < t).$$

On dit qu'il y a *usure* de la machine lorsque λ croît et *rodage* lorsque λ décroît.

1. Dans le cas particulier où l'on suppose que $\mathbb{P}(T > s + t \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$, déterminer la forme de la loi de T. Que peut-on dire de λ dans ce cas ?
2. On se place de nouveau dans le cas général. Exprimer λ en fonction de f. On définit le **taux de panne intégré** par $\Lambda(t) = \int_{s=0}^{t} \lambda(s)ds$. Exprimer la fonction de survie $\bar{F} : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{P}(T > t)$ en fonction de Λ.
3. On suppose ici que T suit une loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $b > 0$, sa densité s'écrit donc : $\forall t > 0$,

   $$f(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-bt} t^{a-1},$$

   avec $\Gamma(a) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$. Etudier s'il y a usure ou rodage selon les valeurs de (a, b). Montrer que $\lambda(t)$ a une limite lorsque $t \to \infty$ et calculer le taux de panne asymptotique $\lim_{t \to \infty} \lambda(t)$.
4. On considère à présent deux composants montés en parallèle à $t = 0$, dont les instants de pannes T_1 et T_2 sont supposés indépendants et suivre des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. La panne du système survient lorsque les deux composants sont en panne, c'est à dire à l'instant $T = \max(T_1, T_2)$, les deux machines sont en panne. Calculer le taux de panne du système. Lorsque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il y a d'abord usure puis rodage pour le système. Que se passe-t-il lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$?
5. On se place de nouveau dans le cas général. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) il y a usure quelque soit $t \geq 0$ (λ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$),
   (ii) pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$:

   $$\bar{F}(s + t) \geq \bar{F}(s)\bar{F}(t),$$

   (iii) le taux de hasard intégré est une fonction convexe.

6. On suppose que la variable T est intégrable et l'on pose $\mathbb{E}[T] = m$. Calculer $\mathbb{E}[\Lambda(T)]$ et montrer que :
   (a) $\mathbb{E}[T \mid T > t] \leq t + m$,
   (b) $\mathbb{E}[\min\{T, t\}] \geq mF(t)$,
   (c) $\Lambda(\mathbb{E}(T)) \leq 1$,
   (d) $\forall t \in [0, \mathbb{E}[T]],\ \mathbb{P}(T \geq t) \geq e^{-\frac{t}{\mathbb{E}[T]}}$.

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace de probabilité. On suppose X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi exponentielle de paramètre 1. On suppose aussi que la loi de X conditionnelle à Y est une loi de Poisson de paramètre Y. Déterminer la loi de (X, Y) et celle de X. Calculer la loi conditionnelle de$Y$ sachant $X = n$.

Exercice 4 (Vecteur gaussien) Soient $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de dimension 2 dont la densité est donnée par : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right],$$

où $\rho \in]0,1[$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Calculer la loi de X_1, puis la loi de X_1 conditionnelle à X_2.

Exercice 5 (Statistiques d'ordre) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de densité $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Soit σ la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $X_{\sigma(1)} < \ldots < X_{\sigma(n)}$ et soit $R = (R_1, \ldots, R_n)$ le *vecteur rang* des observations : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $R_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}\{X_i \geq X_j\}$. Quelle est la loi de R conditionnelle à $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$? Que remarquez vous lorsque X est un n-échantillon d'une loi de densité $f(u)$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 Soit Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On pose par définition

$$\sigma^2(Y|\mathcal{B}) = \mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{B}] - (\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}])^2.$$

En désignant par $\sigma^2(Z)$ la variance d'une variable Z de carré intégrable, montrer que

$$\sigma^2(Y) = \sigma^2(\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}]) + \mathbb{E}[\sigma^2(Y|\mathcal{B})].$$

Que se passe-t-il si Y est indépendante de la tribu $\mathcal{B}$?