MVA - Exercices

Exercice 1 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p_1) et (n_2, p_2).

1. Déterminer la loi de X_1 conditionnelle à $X_1 + X_2 = n$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$.

Exercice 2 Soient $X_1, \ldots, X_p$ des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

1. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_{p-1})$ conditionnelle à $X_1 + \ldots + X_p = n$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$.

Exercice 3 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. à valeurs réelles, i.i.d. de densité $f(x)$.

1. Déterminer la loi de $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$ sachant $\max_{1 \leq i \leq n} X_i = x$.
2. Calculer $\mathbb{E}[\min_{1 \leq i \leq n} X_i \mid \max_{1 \leq i \leq n} X_i]$.

Exercice 4 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. à valeurs réelles, i.i.d. de densité $f(x)$. On suppose f continue et $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < \infty$. On pose $X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X = x$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1 \mid X]$.

Exercice 5 Soient X, Y et Z trois v.a. à valeurs réelles définies sur le même espace de probabilité et telles que :

- X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$,
- sachant $X = x$, la densité conditionnelle de Y est donnée par

$$f|_{Y|X=x}(y) = (y - x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{\{y>x\}}$$

  (on vérifiera qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité),
- sachant $(X, Y) = (x, y)$ avec $x < y$, la densité conditionnelle de Z est donnée par

$$f|_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) = (y - x)e^{-(y-x)z}\mathbf{1}_{\{z>0\}}.$$

1. Donner la loi jointe du vecteur aléatoire (X, Y, Z)
2. Donner la loi (inconditionnelle) de Z
3. Donner la loi conditionnelle du couple (X, Y) sachant $Z = z$
4. Calculer $\mathbb{E}[\sqrt{Y - X} \mid Z = z]$, puis $\mathbb{E}[\sqrt{Y - X}]$
5. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Donner la loi jointe du vecteur (X, U, V)
6. Les v.a. X, U et V sont elles indépendantes ?