MVA - Travaux Dirigés

Notations

- L'univers des possibles est noté Ω et $\mathbb{P}\{\mathcal{E}\}$ désigne la probabilité que l'événement mesurable $\mathcal{E} \subset \Omega$ soit réalisé
- $\mathbb{E}[X]$ désigne l'espérance d'une variable aléatoire X intégrable (ou mesurable et positive)
- L'espace des variables intégrables est noté L_1, celui des variables de carré intégrable est noté L_2
- Si (M_n) désigne une martingale de carré intégrable, le compensateur de la sous-martingale (M_n^2) est noté $\langle M \rangle_n$.
- La tribu engendrée par une collection de v.a. $(V_i)_{i \in I}$ est notée $\sigma(V_i : \; i \in I)$.

Problème (La "Martingale classique")

Un joueur mise sur les résultats des jets indépendants d'une pièce **équilibrée** (*i.e.* la probabilité d'obtenir Pile est égale à 1/2). A chaque tour, il mise une somme $S > 0$. Si la pièce tombe sur Pile, son capital augmente de S, si elle tombe sur Face, le joueur perd sa mise et donc son capital diminue de S. Une stratégie populaire en France au XVIIIe siècle est appelée "La Martingale classique". Elle est définie comme suit :

— le joueur s'arrête de jouer la première fois qu'il gagne, *i.e.* dès le premier Pile, ses mises suivantes sont nulles et **son capital n'évolue plus** ;

— il double sa mise a chaque tour, c'est-à-dire qu'il mise la somme $S_n = 2^n$ au n-ième tour, tant qu'il n'a pas gagné.

Soit Y_n le capital du joueur au temps n (*i.e.* après n jets de la pièce). On admettra que le capital initial est nul ($Y_0 = 0$, au premier tour il mise donc $S_1 = 2$ euros qu'il doit emprunter), et que le joueur a le droit de s'endetter d'une somme illimitée, c'est-à-dire que Y_n peut devenir négatif, arbitrairement grand en valeur absolue. On désigne par U_n le résultat du n-ième lancer, $U_n = 1$ si le résultat est Pile et $U_n = 0$ sinon, et par $\tau = \inf\{n \geq 1 : \; U_n = 1\}$ l'instant (aléatoire) du premier "Pile" obtenu. On considère la filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}$ où $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu engendrée par les résultats (aléatoires) des n premiers lancers, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_k : \; k \leq n)$.

1. Quelle est la loi de la durée τ du jeu ? Montrer qu'il s'agit d'un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Justifier de façon heuristique la stratégie de la "Martingale classique" ?
2. Montrer que la stratégie (S_n) de "La Martingale classique" est $\mathcal{F}$-prévisible.
3. Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale et plus précisément la suite arrêtée au temps d'arrêt τ d'une $\mathcal{F}$-martingale que l'on précisera.
4. Déterminer le processus croissant $\langle Y \rangle_n$. Calculer $\mathbb{E}[\langle Y \rangle_n]$ et discuter la convergence de Y_n dans L_2.
5. Exprimer Y_n en fonction de τ et n, préciser sa loi, et discuter la convergence presque-sûre de Y_n. Quelle est sa limite presque-sûre ?
6. La suite Y_n converge-t-elle dans L_1 ?

7. On suppose maintenant que la banque n'admet pas que le joueur s'endette de plus qu'une valeur limite L (on pourra supposer que $L = 2^k$ pour un $k \geq 1$). Par conséquent, le joueur est obligé de s'arrêter dès que son capital au temps n est strictement inférieur a $-L+2^{n+1}$. Notons Z_n le capital du joueur à l'instant n.
   (a) Soit N la durée du jeu (*i.e.* le nombre de fois que le joueur mise une somme non nulle). Montrer que N est un temps d'arrêt et préciser sa loi.
   (b) Le processus Z_n est-il une martingale ?
   (c) Discuter la convergence presque-sûre et dans L_1 de Z_n et commenter les résultats.

Exercice 1

Soit $X_0 = 1$. On définit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récursivement en supposant que pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi uniforme sur $[0,\ 2X_{n-1}]$ conditionnellement à $\sigma(X_k :\ k \leq n-1)$, c'est-à-dire que l'on peut définir la suite (X_n) de façon récursive en posant : $\forall n \geq 1$, $X_n = 2U_nX_{n-1}$ où les U_n sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0,\ 1]$.

1. Montrer que (X_n) est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(U_k :\ k \leq n))$.
2. Calculer le processus croissant $\langle X\rangle_n$ et $\mathbb{E}[\langle X\rangle_n]$. Discuter la convergence de X_n dans L_2. (Indication : on exprimera X_n en fonction de $U_1,\ \ldots,\ U_n$ pour tout $n \geq 1$)
3. Discuter la convergence presque-sûre de X_n.
4. Déterminer la limite presque-sûre de X_n. (Indication : Considérer $Y_n = \log(X_n)$ et songer à appliquer la loi forte des grands nombres)
5. Discuter la convergence de X_n dans L_1.

Exercice 2

Un joueur dispose initialement de la somme $X_0 = 1$. Il joue à un jeu de hasard, dans lequel il mise à chaque tour une proportion λ de son capital, avec $0 < \lambda \leq 1$. Il a une chance sur deux de doubler sa mise, sinon il perd sa mise. Précisément, l'évolution du capital X_n en fonction du temps n est décrite par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = (1-\lambda)X_n + \lambda X_n\xi_{n+1},$$

où les ξ_n sont i.i.d., avec $\mathbb{P}\{\xi_n = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1/2$.

1. Montrer que (X_n) est une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable, avec $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k,\ k \leq n)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
3. Discuter la convergence presque-sûre de X_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_n^2]$ par récurrence sur n.
5. Que peut-on en déduire sur la convergence dans L_2 de (X_n) ?
6. Déterminer le processus croissant $\langle X\rangle_n$.
7. On suppose désormais que le joueur mise a chaque tour la totalité de son capital, c'est-à-dire $\lambda = 1$.
   (a) Calculer explicitement la loi de X_n.
   (b) Déterminer la limite presque-sûre de (X_n).
   (c) Discuter la convergence de X_n dans L_1. Les X_n sont-ils uniformement intégrables ?