

Chapitre VI: Convergences

1. Convergence des variables aléatoires

Que veut dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge vers f ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

On dit alors que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergence simplement vers f .

Nous avons la même notion pour les v.a.r.

$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplement vers X si
 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. qui sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$. Lorsque n est grand, on s'attend à ce que la proportion de 1 soit à peu près égale à p . Mathématiquement, on voudrait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = p \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega .$$

Cela est faux!!!

On a même $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = 0$ pour tout ω dans l'ensemble $A = \{\omega : \text{il n'y a qu'un nombre fini de tirages 1}\}$

Définition (Convergence presque sûre)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge presque sûrement vers une v.a. X si l'ensemble N des ω tels que la suite numérique $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $X(\omega)$ vérifie $\mathbb{P}(N) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ p.s.} \quad \text{ou} \quad X_n \rightarrow X \text{ p.s.}$$

Définition (Convergence dans L^p)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge dans L^p (où $p \geq 1$) vers une v.a. X si les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les X sont dans L^p , et si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

On dit aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p vers X , et on écrit

$$X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

- $p = 1$ on dit convergence en moyenne
- $p = 2$ on dit convergence en moyenne quadratique



Définition (Convergence en probabilité)

On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge en probabilité vers une v.a. X si pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0$$

ou plus simplement: $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On écrit alors

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X .$$



Proposition (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si pour tout $\epsilon > 0$ on a $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \epsilon\} < \infty$ alors $X_n \rightarrow X$ p.s.



Théorème

On a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0 .$$



Remarque

On peut faire la preuve pour toute fonction f bornée, croissante, continue et nulle en 0. Donc on a

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \text{ si et seulement si } \mathbb{E}(f(X_n - X)) \rightarrow 0 .$$

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.

a) si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

b) si $X_n \rightarrow X$ p.s. alors on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$



Réciproque?

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et que $|X_n| \leq Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où Y est une v.a. appartenant à L^p pour un $p \geq 1$. On a alors $X \in L^p$ et $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Théorème

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Il existe alors une sous suite n_k de la suite des entiers telle que $X_{n_k} \rightarrow X$ p.s.

Théorème (Convergence et continuité)

Soit f une fonction continue.

- a) si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors on a $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$
- b) si $X_n \rightarrow X$ p.s. alors on a $f(X_n) \rightarrow f(X)$ p.s.



Remarque

On peut affaiblir l'hypothèse de continuité de la fonction f pour la convergence presque sûr, il suffit que f soit continue sur un ensemble C et que $P(X \in C) = 1$.

Théorème (Théorème de convergence)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- a) **Convergence monotone** : si les X_n sont positives et croissent presque sûrement vers X , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] .$$

- b) **Convergence dominée ou Lebesgue** : si les X_n convergent presque sûrement vers X et si $|X_n| \leq Y$ p.s. pour tout n où $Y \in L^1$ alors $X_n \in L^1$, $X \in L^1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] .$$

- c) **Lemme de Fatou** : si les X_n vérifient $X_n \geq Y$ p.s. avec $Y \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] .$$

Cela est vrai en particulier si $X_n \geq 0$ p.s.

2. Convergence en loi

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d . On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

pour toute fonction réelle continue et bornée sur \mathbb{R}^d .



On peut remplacer continue par uniformément continue ou par lipschitz.

Théorème

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si la suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X **en probabilité**, alors X_n converge aussi vers X **en loi**.



Théorème (Réciproque partielle)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si X_n **converge en loi** vers X et si de plus X est p.s. **égale à une constante**, alors X_n converge **en probabilité**.

Théorème (Théorème de Slutsky)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d .
Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et que $\|X_n - Y_n\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. dans \mathbb{R}^d . $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\phi_{X_n}(x) \rightarrow \phi_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Théorème

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. dans \mathbb{R}^d telle que $\phi_{X_n}(x) \rightarrow \phi(x)$ et si ϕ est continue en 0, alors ϕ est la fonction caractéristique d'une v.a. X . De plus $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.



Proposition (Convergence en loi et fonction de répartition)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. définie pour tout n sur un espace de probabilité $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ de fonction de répartition F_{X_n} et soit X une v.a.r. définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X . La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si la suite $(F_{X_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$ en tout point de continuité de F_X .