Chapitre VII:
Loi des grands nombres

1. La loi des grands nombres

Théorème (La loi des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *des v.a. i.i.d. de carré intégrable, et posons*

$$\mu = \mathbb{E}(X_1)\ , \quad \textit{et} \ \ \sigma^2 = \sigma^2_{X_1}\ .$$

Soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$*. On a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j = \mu \quad \textit{p.s. et dans } L^2\ .$$

Théorème (La loi des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *des v.a. i.i.d. de carré intégrable, et posons*

$$\mu = \mathbb{E}(X_1)\ , \quad \textit{et}\ \ \sigma^2 = \sigma^2_{X_1}\ .$$

Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. *On a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \mu \quad \textit{p.s. et dans } L^2\ .$$

Remarque

Puisqu'on a convergence p.s. et L^2 *on a aussi convergence en probabilité.*

Théorème (La loi des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *des v.a. i.i.d. et soit* $\mu \in \mathbb{R}$. *Posons* $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. *La suite* $\frac{S_n}{n}$ *converge p.s. vers* μ *si et seulement si* $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. *Dans ce cas, la convergence a aussi lieu dans* L^1.

2. Le théorème-limite central

L'idée

Soit $X_1, \ldots, X_j, \ldots$ des v.a. i.i.d. de variance finie σ^2 et de moyenne μ, et soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Alors si n est grand, la loi de S_n est approximativement une $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Théorème (Théorème-limite central)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *des v.a.r. i.i.d. avec* $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ *et* $Var(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$*. Soit*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \quad et \quad Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} .$$

Alors, les v.a. Y_n *convergent en loi vers une v.a.* $\mathcal{N}(0, 1)$*.*

Corollaire

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *des v.a.r. i.i.d. avec* $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ *et* $Var(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$*. Alors pour tout* $a > 0$ *on a*

$$\mathbb{P}\Big[\mu \in [\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}]\Big] \to \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ ,$$

avec $\bar{X}_n = S_n/n$*.*