

## Chap 3 : Théorie des tests

# Organisation du chapitre 3

- 1 Tests statistiques
  - Un exemple d'introduction
  - Tests paramétriques
  - Test d'adéquation
  - Test d'indépendance
  - Test d'ajustement de Kolmogorov

# 1. Tests statistiques

## 1.1. Un exemple d'introduction

## Exemple d'introduction : les faiseurs de pluie

- Des relevés (sur longue période) : le niveau naturel des pluies dans la Beauce par an (en mm) suit une loi  $\mathcal{N}(\mu = 600, \sigma = 100)$ .
- Des entrepreneurs prétendent pouvoir augmenter le niveau moyen de pluie (insémination des nuages-iodure d'argent). Essai entre 1951 et 1959 :

Année	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
mm	510	614	780	512	501	534	603	788	650

- Deux hypothèses s'affrontent :
  - L'insémination était sans effet
  - Elle augmentait le niveau moyen de pluie de 50 mm.

**Hypothèses** Si  $m$  désigne l'espérance mathématique de  $X$  v.a. égale au niveau annuel :

$$\begin{cases} H_0 & : & m = 600 \text{ mm} \\ H_1 & : & m = 650 \text{ mm} \end{cases}$$

1. Pour les agriculteurs : le coût ! Donc les faits observés doivent contredire nettement la validité de  $H_0$  (l'hypothèse nulle).

## Exemple d'introduction

Niveau  $\alpha$  Niveau de probabilité ou ils sont prêts à accepter  $H_1$ , i.e. le résultat obtenu faisait partie d'une éventualité de 5 sur 100 de se produire.

Ils prennent donc un risque de 5% de se tromper (événements rares arrivent quand même).

**Test** Tester la valeur  $m$ , on considère  $\bar{X}$  (moyenne des observations) qui est donc la variable de décision

Si  $H_0$  est vraie,  $\bar{X}$  suit  $\mathcal{N}(600, \frac{100}{\sqrt{9}})$

Si  $\bar{x}$  est trop grand, i.e.  $\bar{x} \geq k$ , avec  $k$  tel que  $P(Y \geq k) = \alpha$  où  $Y \sim \mathcal{N}(600, \frac{100}{\sqrt{9}})$ . donc

$$k = 600 + \frac{100}{3} 1.64 = 655$$

**Décision** Règle de décision :

- Si  $\bar{X} > 655$ , on rejette  $H_0$  et accepte  $H_1$
- Si  $\bar{X} < 655$ , on conserve  $H_0$

## Exemple d'introduction : les types d'erreur

Supposons que les faiseurs de pluie ont raison, alors  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(650, \frac{100}{3})$ .

On commet une erreur à chaque fois que  $\bar{x} < 655$ , donc avec probabilité :

$$\beta := P\left(U < \frac{655 - 650}{100/3}\right) = P(U < 0.15) = 0.56$$

$\alpha = P[\text{accepter } H_1 ; \text{alors que } H_0 \text{ vraie}]$  : erreur de première espèce !

$\beta = P[\text{accepter } H_0 ; \text{alors que } H_1 \text{ vraie}]$  : erreur de deuxième espèce !

Décision \ Vérité	$H_0$	$H_1$
$H_0$	$1 - \alpha$	$\beta$
$H_1$	$\alpha$	$1 - \beta$

**Remarque.** Les deux hypothèses ne jouent pas de rôles symétriques : -  $k$  déterminé par  $H_0$  et  $\alpha$  -  $\beta$  est déterminé par la considération supplémentaire de  $H_1$ .

## 1.2. Tests paramétriques



# Les Différents Tests paramétriques

## Définition 4.1

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon dont la loi est dans le modèle  $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ . On suppose  $\Theta$  partitionné en  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  et on associe les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$H_0$  s'appelle l'hypothèse nulle et  $H_1$  l'hypothèse alternative.

$$\text{Test Simple } \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases} ; \text{ Test unilatéral } \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} ; \text{ Test composite } \begin{cases} H_0 : \theta \in [\theta_0, \theta_1] \\ H_1 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1] \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1] \\ H_1 : \theta \in [\theta_0, \theta_1] \end{cases} ; \text{ Test bilatéral } \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

# Tests paramétriques

## Définition 4.2

- Erreur de première espèce, notée  $\alpha$ , est la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle, i.e.

$$\alpha = P(\text{choisir } H_1 | H_0 \text{ est vraie})$$

- Erreur de deuxième espèce, notée  $\beta$ , est la probabilité de conserver à tort l'hypothèse nulle, i.e.

$$\beta = P(\text{choisir } H_0 | H_1 \text{ est vraie})$$

- La puissance d'un test, notée  $\mathcal{P}$ , est la probabilité de rejeter  $H_0$  lorsque  $H_1$  est vraie.

## Définition 4.3

La région de Rejet d'un test,  $\mathcal{W}$ , est l'ensemble des valeurs de la statistique de test qui conduisent à rejeter  $H_0$  au profit de  $H_1$ .

# Construction d'un test paramétrique

On a donc :

$$\alpha = P_{H_0}(\mathcal{W}), 1 - \alpha = P_{H_0}(\mathcal{W}^c), \mathcal{P} = 1 - \beta = P_{H_1}(\mathcal{W}).$$

Résumé :

Décision \ Vérité	$H_0$	$H_1$
$H_0$	$1 - \alpha$	$\beta$
$H_1$	$\alpha$	$1 - \beta$

Les démarches de la construction d'un test :

- 1- choix de  $H_0$  et  $H_1$
- 2- détermination de la statistique de test
- 3- forme de la région de rejet
- 4- détermination de la loi de la statistique de test sous  $H_0$  et le calcul de la région de rejet en fonction de  $\alpha$
- 5- calcul de la puissance
- 6- calcul de la valeur expérimental de test

# Le test simple : Méthode de Neyman-Pearson

Il s'agit de maximiser la puissance  $(1 - \beta)$  du test pour une valeur donnée de  $\alpha$  risque de première espèce.

Cela revient à choisir la région critique optimale, i.e. un domaine de  $\mathbb{R}^n$  parmi l'ensemble de toutes les réalisations possibles de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  dont la forme définira ensuite une variable statistique.

## Théorème 4.1 (Neyman Pearson)

La région critique optimale  $W$  est définie par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  tels que :

$$\frac{L(x; \theta_1)}{L(x; \theta_0)} > k_\alpha$$

ou  $k_\alpha$  est une constante telle que  $P_{H_0}(W) = \alpha$ . Alors cette région  $W$  réalise le maximum de  $1 - \beta$ .

# Test Simple sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

connu Echantillonnage gaussien  $\mathcal{N}(\mu; \sigma_0^2); \mu \in \mathbb{R}$ , variance connue.

**Step 1** On choisit les hypothèses

$$\text{Test simple : } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

avec  $\mu_1 > \mu_0$ .

**Step 2-3** Le rapport de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} Z_n = \frac{L(X; \mu_1)}{L(X; \mu_0)} &= \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \right] \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{\sigma_0^2} (\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=1}^n X_i \right) \exp \left( -\frac{n}{2\sigma_0^2} (\mu_1^2 - \mu_0^2) \right). \end{aligned}$$

$Z_n$  est une variable aléatoire continue sous  $\mathbb{P}_{\mu_0}$ . La région critique optimale au seuil  $\alpha$  est

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n); \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_0^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right] \right) > k \right\}$$

## Tests portant sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x_1, \dots, x_n); \exp\left(\frac{1}{\sigma_0^2}(\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=1}^n x_i\right) \exp\left(-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right) > k \right\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n); \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i > c \right\}. \end{aligned}$$

On a donc : - statistique de test :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - région critique (de rejet) :  $W = \{\bar{X}_n > K_\alpha\}$ .

**Step 4** Détermination de  $K_\alpha$  : sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ .  
Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{H_0}(W) &= \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > K_\alpha\right) = \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} > \frac{\sqrt{n}(K_\alpha - \mu_0)}{\sigma_0}\right) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(K_\alpha - \mu_0)}{\sigma_0}\right) = \alpha. \end{aligned}$$

où  $\phi$  est la fonction de répartition de la gaussienne centrée et réduite.

d'où  $K_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}(1 - \alpha)$ .

# Tests portant sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si :

$$\bar{x}_n > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}(1 - \alpha)$$

**Step 5 Puissance** : sous l'hypothèse  $H_1$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , la puissance du test est définie par :

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}_{H_1}(W) = \mathbb{P}_{H_1}(\bar{X}_n > K_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma_0} + \phi^{-1}(1 - \alpha)\right).$$

## Test Unilatéral

Step 1 On choisit les hypothèses

$$\text{Test unilatéral : } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Step 2-3 On a toujours - statistique de test :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - région critique (de rejet) :  $W = \{\bar{X}_n > K_\alpha\}$ .

Step 4 On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si :

$$\bar{x}_n > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Step 5 Pour tout  $\mu > \mu_0$ , la puissance de test est définie donc par :

$$\mathcal{P}(\mu) = \mathbb{P}_{H_1}(W) = \mathbb{P}_{H_1}(\bar{X}_n > K_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} + \phi^{-1}(1 - \alpha)\right).$$



## Test Unilatéral

**Step 1** On choisit les hypothèses

$$\text{Test unilatéral : } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

**Step 2-3** On a - statistique de test :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - région critique (de rejet) :

$$W = \{\bar{X}_n < K_\alpha\}.$$

**Step 4** Détermination de  $K_\alpha$  : sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{H_0}(W) &= \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X}_n > K_\alpha) = \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} < \frac{\sqrt{n}(K_\alpha - \mu_0)}{\sigma_0}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\sqrt{n}(K_\alpha - \mu_0)}{\sigma_0}\right) = \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{d'où } K_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}(\alpha).$$

## Tests portant sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

**Step 5 Puissance** : sous l'hypothèse  $H_1$ , Pour tout  $\mu < \mu_0$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , la puissance du test est définie par :

$$\mathcal{P}(\mu) = \mathbb{P}_{H_1}(W) = \mathbb{P}_{H_1}(\bar{X}_n < K_\alpha) = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} + \phi^{-1}(\alpha)\right).$$

### Test Bilatéral

**Step 1** On choisit les hypothèses

$$\text{Test bilatéral : } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

**Step 2-3** On a - statistique de test :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - région critique (de rejet) :  
 $W = \{|\bar{X}_n - \mu_0| > K_\alpha\}$ .

**Step 4** Détermination de  $K_\alpha$  : sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{H_0}(W) &= \mathbb{P}_{H_0}(|\bar{X}_n - \mu_0| > K_\alpha) = 1 - \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\sqrt{n}K_\alpha}{\sigma_0} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \leq \frac{\sqrt{n}K_\alpha}{\sigma_0}\right) \\ &= 2(1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}K_\alpha}{\sigma_0}\right)) = \alpha. \end{aligned}$$

## Tests portant sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

$$\text{d'où } K_\alpha = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si :

$$|\bar{x}_n - \mu_0| > \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

**Step 5 Puissance** : sous l'hypothèse  $H_1$ , Pour tout  $\mu \neq \mu_0$ ,  $\bar{X}_n$  suit une loi  $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$ , la puissance du test est définie par :

$$\mathcal{P}(\mu) = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} + \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) + \phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma_0} - \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

## Tests simple sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

On considère un modèle d'échantillonnage gaussien  $\mathcal{P}\mathcal{N}(\mu; \sigma^2); \mu \in \mathbb{R}$  à variance inconnue. On rappelle que  $S_n^2$  est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

On choisit les hypothèses

$$\text{Test simple : } \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

avec  $\mu_1 > \mu_0$ .

On a - statistique de test :  $\Lambda_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$  - région critique (de rejet) :  $W = \{\Lambda_n > K_\alpha\}$ .

Détermination de  $K_\alpha$  : sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $\Lambda_n$  suit une loi  $T_{n-1}$  (loi de student à  $n-1$  degrés de liberté). Il vient donc :

$$\mathbb{P}_{H_0}(W) = \mathbb{P}_{H_0}(\Lambda_n > K_\alpha) = 1 - F_{T_{n-1}}(K_\alpha) = \alpha.$$

où  $F_{T_{n-1}}$  désigne la fonction de répartition de  $T_{n-1}$ .

on a donc  $K_\alpha = F_{T_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha)$ . On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si :

$$\bar{x}_n > \mu_0 + \frac{S_n}{\sqrt{n}} F_{T_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha)$$

## Tests portant sur un paramètre : moyenne d'une loi normale

**Step 5 Puissance** : sous l'hypothèse  $H_1$ ,  $\Lambda_n$  suit une loi  $T_{n-1}$ , la puissance du test est définie par :

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}_{H_1}(W) = \mathbb{P}_{H_1}(\Lambda_n > K_\alpha) = 1 - F_{T_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{s_n} + F_{T_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha)\right)$$

Pour les autres tests : test unilatéral et test bilatéral, la méthode reste la même.

## Tests simple sur un paramètre : variance d'une loi normale

connu Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\mu$  connu.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.$$

Step 1 On choisit les hypothèses

$$\text{Test simple : } \begin{cases} H_0 : \sigma = \sigma_0 \\ H_1 : \sigma = \sigma_1 \end{cases}$$

avec  $\sigma_1 > \sigma_0$ .

Step 2-3 On a - statistique de test :  $\Lambda_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  - région critique (de rejet) :  $W = \{\Lambda_n > K_\alpha\}$ .

Step 4 Détermination de  $K_\alpha$  : sous l'hypothèse  $H_0$ ,  $\frac{\Lambda_n}{\sigma_0^2}$  suit une loi  $\chi_n^2$  :

$$\mathbb{P}_{H_0}(W) = \mathbb{P}_{H_0}(\Lambda_n > K_\alpha) = \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\Lambda_n}{\sigma_0^2} > \frac{K_\alpha}{\sigma_0^2}\right) = 1 - F_{\chi_n^2}\left(\frac{K_\alpha}{\sigma_0^2}\right) = \alpha.$$

## Tests portant sur un paramètre : variance d'une loi normale

où  $F_{\chi_n^2}$  désigne la fonction de répartition de la loi  $\chi_n^2$ , on a donc  $K_\alpha = \sigma_0^2 F_{\chi_n^2}^{-1}(1 - \alpha)$ . On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 > \sigma_0^2 F_{\chi_n^2}^{-1}(1 - \alpha)$$

**Step 5 Puissance** : sous l'hypothèse  $H_1$ ,  $\frac{\Lambda_n}{\sigma_1^2}$  suit une loi  $\chi_n^2$ , la puissance du test est définie par :

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}_{H_1}(W) = \mathbb{P}_{H_1}(\Lambda_n > K_\alpha) = \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\Lambda_n}{\sigma_1^2} > \frac{K_\alpha}{\sigma_1^2}\right) = 1 - F_{\chi_n^2}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} F_{\chi_n^2}^{-1}(1 - \alpha)\right)$$

Même méthode pour les autres tests.

**connu** On utilise la statistique de test  $\Lambda_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$

## 1.3. Test d'adéquation



## Test d'adéquation : test de $\chi^2$

- On considère un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  et  $P_\theta$  une loi donnée où le paramètre  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ .
- L'objectif du test d'adéquation (ou test du  $\chi^2$ ) est répondre à la question : les observations suivent-elles bien la loi  $P_\theta$  ?
- Le problème de test à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : X_1, \dots, X_n \text{ suivent la loi } P_\theta \\ H_1 : X_1, \dots, X_n \text{ ne suivent pas la loi } P_\theta \end{cases}$$

## Test d'adéquation : test de $\chi^2$ - construction du test

On répartit les  $n$  observations de la v.a.  $X$  en  $k$  classes :  $[e_{i-1}, e_i[$   $1 \leq i \leq k$   
d'effectifs aléatoires  $N_i$ . On calcule :

$$p_i = P_{H_0}(X \in [e_{i-1}, e_i[)$$
$$D_n = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_i)^2}{p_i}$$

**Remarque** -  $np_i$  représente l'effectif théorique -  $\hat{p}_i$  représente la probabilité estimée :  $\hat{p}_i = \frac{N_i}{n}$ . -  $D$  représente une distance entre la loi théorique  $P_\theta$  et la loi observée. - On aurait également pu définir  $D_n$  par

$$D_n = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_i)^2}{\hat{p}_i}$$

Dans le cas où le paramètre  $\theta$  est connu, on a le résultat suivant

**Théorème** Si  $n \rightarrow \infty$ , alors  $D_n$  est asymptotiquement distribué comme une variable de  $\chi^2_{k-1}$  et ceci quelle que soit la loi de  $X$ .

## Test d'adéquation : test de $\chi^2$ - construction du test

**Remarque** On assimile  $D_n \sim \chi_{k-1}^2$  si  $np_i > 5$  pour toute classe. Dans le cas contraire, on procède à des regroupements. D'où le test  $\chi^2$ .

**Rejet** On rejettera  $H_0$  si la valeur  $d_n$  constaté

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_i)^2}{p_i} \text{ est trop grand, c-à-d si}$$

$$d_n > F_{\chi_{k-1}^2}^{-1}(1 - \alpha)$$

Dans le cas où le paramètre  $\theta$  n'est pas connu, on a le résultat suivant :

**Théorème** Si  $n \rightarrow \infty$ , alors  $D_n$  est asymptotiquement distribué comme une variable de  $\chi_{k-s-1}^2$  et ceci quelle que soit la loi de  $X$ , où  $s$  désigne le nombre de paramètres estimés.

**Remarque** Dans le calcul des  $p_i$ , on utilise les valeurs estimés des paramètres  $\hat{\theta}$ .

## Test d'adéquation : test de $\chi^2$ - Exemple

**Exemple** Le tableau suivant présente les résultats de 500 mesures de l'erreur de pointage en dérive lors du tir à partir d'un avion sur une cible terrestre.

mesures (en radian)	effectifs
$[-4, -3 [$	6
$[-3, -2 [$	25
$[-2, -1 [$	72
$[-1, 0 [$	133
$[0, 1 [$	120
$[1, 2 [$	88
$[2, 3 [$	46
$[3, 4 [$	10

Testons l'adéquation des observations à une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec un risque  $\alpha = 0.05$ .

## Test d'adéquation : test de $\chi^2$ - Exemple

- Pour  $i = 1, \dots, 8$  notons  $c_i$  le centre de la  $i$ -ème classe. Les estimateurs de  $\mu$  et de  $\sigma^2$  sont donnés par :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^8 n_i c_i = 0.168; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^8 n_i (c_i - \hat{\mu})^2 = 2.098$$

- Sous  $H_0$ , on a

$$p_i = \Phi\left(\frac{e_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{e_{i-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- On rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si

$$D > F_{\chi_{8-2-1}^2}^{-1}(1 - 0.05) = F_{\chi_5^2}^{-1}(0.95) = 11.07.$$

- D'après calcul, on trouve  $D = 3.524$ . Donc, on accepte l'hypothèse  $H_0$ .

## 1.5. Test d'indépendance

## Test d'indépendance

- Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a à valeurs dans  $\{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$ . Soit  $((X_i; Y_i); 1 \leq i \leq n)$  un n-échantillon de  $(X, Y)$ .
- On note  $p_{ij} = P_{H_0}(X_1 = i, Y_1 = j)$ , et les marginales

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^s p_{ij}, \quad p_{.j} = \sum_{i=1}^r p_{ij}$$

- On souhaite vérifier si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- On étudie le test suivant

$$\begin{cases} H_0 : p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \\ H_1 : p_{ij} \neq p_{i.} p_{.j} \end{cases}$$

- On note les occurrences

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=i, Y_k=j}; \quad N_{i.} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=i}, \quad N_{.j} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{Y_k=j}$$

## Test d'indépendance : construction du test

- La statistique du test est :

$$D_n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s D_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - n\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - \frac{N_{i.} N_{.j}}{n})^2}{\frac{N_{i.} N_{.j}}{n}}$$

- $D$  représente la distance entre le tableau observé et le tableau théorique. Sous  $H_0$ ,  $D_n$  suit une loi de  $\chi_{(s-1)(r-1)}^2$
- Pour  $\alpha \in ]0,1[$  donné, on rejette donc l'hypothèse  $H_0$  si

$$D > F_{\chi_{(r-1)(s-1)}^2}^{-1}(1 - \alpha)$$



## 1.6. d'ajustement de Kolmogorov

## Test de Kolmogorov

- Test non-paramétrique d'ajustement à une distribution entièrement spécifiée de fonction de répartition  $F(x)$ .
- Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi inconnue  $P$  de fonction de répartition  $F$  supposée continue. L'objectif du test de Kolmogorov est l'ajustement de la loi inconnue  $P$  à une loi connue  $P_0$  de fonction de répartition continue  $F_0$ .
- Le problème de test à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : F = F_0 \text{ (} F_0 \text{ connue)} \\ H_1 : F \neq F_0 \end{cases}$$

- On introduit d'abord  $F_n$  la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty, x]}(X_i)$$

## Test de Kolmogorov : construction du test

- $F_n$  est un estimateur sans biais de  $F$ , en effet :

$$E[F_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\mathbf{1}_{]-\infty, x]}(X_i)] = P(X_1 < x) = F(x)$$

- D'après le Théorème Glivenko-Cantelli (admis)

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - F(y)| \rightarrow 0, \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty.$$

- En particulier, si l'on suppose de plus que  $F$  est continue, alors

$$\sqrt{n} \sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n(y) - F(y)| \rightarrow W \text{ en loi, quand } n \rightarrow \infty.$$

- $W$  est indépendante de  $F$  et admet comme fonction de répartition :

$$K(y) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 y^2)$$

## Test de Kolmogorov : construction du test

- La statistique du test est :

$$D_n = \sqrt{n} \sup |F_n(x) - F_0(x)|$$

- Sous  $H_0$ , (d'après les résultats de Glivenko - Kolmogorov en théorie de l'échantillonnage)  $D_n$  est asymptotiquement distribué comme suit :

$$P(D_n < y) \rightarrow K(y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 y^2)$$

- La fonction  $K$  a été tabulée et fournit donc la région de rejet :

$$D_n > K^{-1}(1 - \alpha)$$