ENSIIE **2A**

$2^{\text{ème}}$ **semestre 2016/2017** **Calcul stochastique**

Quelques applications en finance

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard de filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dans la suite, $r > 0$ est le taux sans risque des marchés considérés et on notera $\tilde{X}$ la valeur actualisée d'un actif de prix X.

Exercice 1. Dividendes

On considère un actif risqué de rendement r. Cet actif distribue à chaque instant t un taux de dividende δ_t et a une volatilité σ.

a) Justifier que le prix de l'actif à l'instant t, noté S_t est solution de l'EDS suivante

$$dS_t = S_t\left((r-\delta_t)dt + \sigma dB_t\right)$$

b) Exprimer S_t en fonction de t et des paramètres.

c) Donner le prix d'un call de maturité T, de strike K sur S à l'instant t.

Exercice 2. Volatilité locale

Soit S solution de $dS_t = S_t\left(rdt + \sigma(t,\ S_t)dB_t\right)$, où σ est une fonction Lipshitzienne bornée. On cherche à valoriser un produit de pay-off $f(S_T)$.

a) Montrer que S est markovien.

b) Montrer que $X_t = \mathbb{E}[f(S_T) \mid \mathcal{F}_t]$ est une martingale.

c) On pose $P(t,\ x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}f(S_T) \mid S_t = x]$. On admettra que P est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. Montrer que P est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + rx\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sigma(t,x)^2x^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - rP = 0 \\ P(T,x) = f(x) \end{cases}$$

Exercice 3. Volatilité stochastique

Soit $(\sigma_t)_{0\leq t}$ un processus $\mathbb{F}$-adapté tel que $0 < \sigma_1 \leq \sigma_t \leq \sigma_2$. On note S (resp. S^i) le processus solution de $dS_t = S_t\left(rdt + \sigma_t dB_t\right)$ (resp. $dS_t^i = S_t^i\left(rdt + \sigma_i dB_t\right)$). Soit h une fonction de pay-off convexe. On note $P(t,x)$ (resp. $P_i(t,x)$) le prix du produit de pay-off $h(S_T)$ (resp. $h(S_T^i)$).

a) En admettant que P_1 est $\mathcal{C}^{1,2}$, montrer que P_1 satisfait une EDP que l'on précisera.

b) Montrer que $x \to P(t,x)$ est convexe.

c) Exprimer $e^{-rT}P_1(t,S_T)$ en fonction de $e^{-rt}P_1(t,S_t)$.

d) Déduire de ce qui précède que

$$P_1(t,x) \leq P(t,x) \leq P_2(t,x)$$

Exercice 4. Portefeuille de marché

Soit S solution de $dS_t = S_t\,(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$. On appelle portefeuille un couple $(\alpha,\ \beta)$ de processus adaptés tels que la valeur du portefeuille à l'instant t soit $V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t$. Le portefeuille est autofinançant si $dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t$.

a) Montrer qu'un portefeuille autofinancé est caractérisé par le couple $(v,\ \beta)$ tel que

$$\begin{cases} dV_t = r_t V_t dt + \beta_t(dS_t - r_t S_t dt) \\ V_0 = v \end{cases}$$

b) On note H le processus défini par $dH_t = -H_t(r_t dt + \theta_t dB_t)$ avec $\theta_t = (\mu_t - r_t)/\sigma_t$. Montrer que $M_t = H_t^{-1}$ défini un portefeuille autofinancé dont on précisera les composantes $'\alpha,\ \beta)$.

Exercice 5. Portefeuille autofinançant

On considère un marché financier composé d'un actif sans risque de taux $r > 0$ et d'un actif riqué S

solution de l'EDS : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$. On note $(\pi^0,\ \pi)$ un portefeuille de valeur $V_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$.

a) Le portefeuille $(S_t,\ 1)$ est-il autofinançant ?

b) Le portefeuille $(x - 2\int_0^t u S_u e^{-ru},\ t)$ est-il autofinançant ?

c) Quelle stratégie autofinançante permet de couvrir une position longue en actif risqué égale à t ?

Exercice 6. Marché complet mais non viable On considère un marché dans lequel sont négociés trois actifs. Un actif sans risque dont la dynamique est $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ et deux actifs risqués $dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma dBt)$ avec $\mu_1 \neq \mu_2$.

a) Montrer que le marché est complet

b) Montrer que la marché admet des opportunités d'arbitrage.

c) Construire explicitement une telle opportunité d'arbitrage, c'est- à-dire expliciter un triplet $(\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2)$ de processus adaptés tels que le portefeuille associé soit autofinançant et $V_0 = 0$; $V_T > 0$. On pourra se restreindre à une OA statique, c'est-à-dire telle que $(\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2)$ soient des constantes.